

## MODELADO ANALÍTICO DEL PROCESO DE FISURACIÓN Y FALLO EN FLEXIÓN SIMPLE DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

J. R. Carmona y G. Ruiz

E.T.S. de Ingenieros de Caminos,  
Canales y Puertos, Universidad de Castilla la Mancha  
Avenida Camilo José Cela s/n, 13071 Ciudad Real  
E-mail: jacinto.rc@gmail.com  
Tfno: 926 29 53 00 Ext. 3276. Fax: 926 29 53 91

### RESUMEN

En el presente trabajo se propone un modelo analítico para analizar el fallo de secciones sometidas a flexión en vigas de hormigón armado. Se impone el equilibrio de fuerzas en la sección y, para determinar la tensión en el armado, se incorpora una ecuación de compatibilidad que relaciona la apertura de fisura con el alargamiento de la barra de refuerzo. De esta forma la adherencia entre hormigón y acero se incorpora como parámetro al modelo. El modelo tiene en cuenta simplídicamente el comportamiento en fractura del hormigón introduciendo, en la punta de la fisura, una fuerza de tracción dependiente de las tensiones cohesivas. El modelo se valida frente a resultados experimentales de vigas de hormigón armado. La formulación propuesta permite obtener la relación entre el momento aplicado en la sección y la apertura de fisura correspondiente. Asimismo, permite estudiar la influencia de la adherencia en la capacidad de rotación de las secciones de hormigón armado.

### ABSTRACT

This work presents an analytical model to study the failure of RC sections subjected to bending. The model is based in the forces equilibrium at the sectional level. It determines the stress in the reinforcement by introducing an additional compatibility equation enforcing that the crack opening is equal to the stretching of the reinforcement. The proposed formulation assumes a cohesive behavior of the fractured concrete introducing a force that depends on the cohesive stresses at the crack tip. Model results are validated against several beam tests. The crack opening for any bending moment and the plastic rotational capacity of RC sections can be obtained with the model.

**ÁREAS TEMÁTICAS PROPUESTAS:** Aplicaciones y casos prácticos

**PALABRAS CLAVE:** Hormigón armado, Apertura de fisura, Fallo por flexión, Tecnología del hormigón estructural

### 1. INTRODUCCIÓN

El comportamiento de las vigas de hormigón armado frente a esfuerzos de flexión ha sido un tema extensamente estudiado desde el punto de vista del diseño de estructuras de hormigón. Así pues, desde el inicio de la tecnología del hormigón se han ido proponiendo diversos modelos para su análisis. Desde un punto de vista práctico, los métodos más conocidos para determinar el momento último en secciones de hormigón armado son el método del momento tope (Instrucción-68 hormigón armado) y el del diagrama de pivotes (EHE). Estos métodos asumen que el hormigón no resiste tracciones y que la adherencia de las barras es perfecta, simplificaciones que conducen a tener que comprobar el momento de rotura y la apertura de fisura por separado, cuando en realidad ambos valores derivan del mismo fenómeno provocado por la flexión de una sección.

En el ámbito de la Mecánica de la Fractura se han propuesto diferentes formulaciones para el análisis del comportamiento de una sección sometida a flexión teniendo

en cuenta el proceso de fisuración [1, 2]. Estos estudios han estado fundamentalmente encuadrados en el estudio de secciones débilmente armadas, por lo que el fallo por compresiones excesivas, en general, quedaba fuera de su ámbito [3].

En el presente trabajo se propone una metodología para analizar el fallo por flexión en secciones rectangulares de hormigón armado, pudiendo producirse el fallo bien por la rotura de la barra de acero o bien porque se alcanza una cierta deformación crítica en la zona de hormigón comprimida. El modelo introduce una ecuación de compatibilidad, basada en conceptos de Mecánica de Fractura, que relaciona la apertura de fisura con la tensión en la barra de acero, incluyendo como parámetros la adherencia hormigón-acero, la cuantía de armado y propiedades mecánicas de los materiales.

## 2. MODELADO DEL PROCESO DE PROPAGACIÓN DE UNA FISURA A TRAVÉS DEL CANTO

Se considera una sección rectangular de hormigón armado en la que va a progresar una fisura. Las diferentes variables geométricas que intervienen en el problema se muestran en la Fig. 1. La viga tiene un canto  $h$  y un ancho  $b$ . La profundidad de la fisura viene representada por la letra  $z$  y el recubrimiento de las barras de acero por la letra  $c$ . Estas dimensiones geométricas pueden adimensionalizarse dividiendo por el canto  $h$ . De este modo definimos:  $\xi = \frac{z}{h}$  como la profundidad relativa de la fisura adimensionalizada y  $\zeta = \frac{c}{h}$  como el recubrimiento expresado en forma adimensional; estos parámetros tienen un valor comprendido entre 0 y 1.

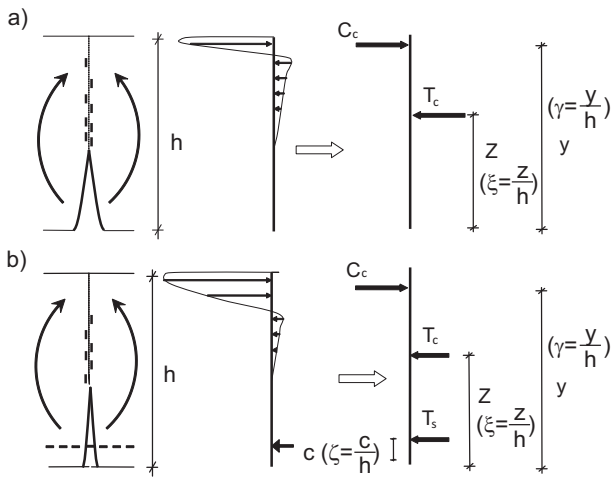


Figura 1: Comportamiento de una sección fisurada a flexión: a) sección sin armado; b) sección con armadura

La profundidad de la resultante del bloque comprimido,  $y$ , es evaluada mediante el equilibrio de fuerzas horizontales, véase Fig. 1a:

$$T_c = C_c \quad (1)$$

Se asume una distribución rectangular de las tensiones en la zona comprimida, con un valor igual de la tensión a la resistencia del hormigón,  $f_c$ . La resultante del bloque comprimido está situada en el centro de gravedad de la distribución de tensiones, de esta forma resultante de las compresiones  $C_c$  puede escribirse como:

$$C_c = 2b(h - y)f_c. \quad (2)$$

A partir de las Eqs. (1) y (2) la profundidad de la resultante del bloque comprimido es igual a:

$$y = h - \frac{T_c}{2bf_c}. \quad (3)$$

Las resultantes de compresiones y tracciones se pueden expresar en forma adimensionalizada dividiendo su valor por el área de la sección,  $bh$ , multiplicada por la resistencia a tracción del hormigón,  $f_{ct}$ .

$$T_c^* = \frac{T_c}{bhf_{ct}}, \quad (4)$$

$$C_c^* = \frac{C_c}{bhf_{ct}}. \quad (5)$$

Así pues la Eq. (3) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2n_f} T_c^*, \quad (6)$$

donde  $n_f$  expresa el cociente entre la resistencia a compresión,  $f_c$  y la resistencia a tracción,  $f_{ct}$ .

Durante el progreso de una fisura, el hormigón en su frente va a generar una zona de proceso daño (FPZ) dado el carácter cuasifrágil del material, véase la Fig. 1. La resultante adimensional de las tracciones en esa zona,  $T_c^*$ , puede representarse a través de la ley de Efecto de Escala propuesta por el Prof. Bažant [4], véase la Eq. (7).

$$T_c^* = \frac{T_c}{bhf_{ct}} = \frac{(\gamma - \xi)}{\sqrt{1 + \frac{\beta_H}{\beta_0}}} \quad (7)$$

donde  $\beta_H$  es el denominado número de fragilidad de Hillerborg [4], que es igual a una dimensión característica del elemento en estudio, en nuestro caso adoptaremos el canto, dividido de la longitud característica del material. Esta longitud se define como,  $l_{ch} = \frac{E_c G_F}{f_{ct}^2}$ , donde  $E_c$  es el módulo de elasticidad del hormigón,  $G_F$  es la energía de fractura y  $f_{ct}$  es la resistencia a tracción del hormigón.  $\beta_H$  es un parámetro que nos servirá para comparar elementos escalados entre sí.  $\beta_0$  es una constante relacionada con el tamaño de árido y se ha tomado igual a 2 veces el tamaño máximo de árido dividido de  $l_{ch}$  [4]. La fuerza de tracción  $T_c$  se aplica a la altura  $z$ . Obsérvese que  $z$  es también la longitud que se toma como referencia en el proceso de crecimiento de la fisura, la cual, para simplificar el problema, se identifica con su profundidad. Debe tenerse en cuenta que la posición de la punta de una fisura cohesiva se difumina a lo largo de la zona de proceso. El momento en la sección durante el progreso de la fisura es igual a la tracción,  $T_c$ , por el brazo  $(y - z)$ , que si se expresa de forma adimensionalizada queda como:

$$M_c^* = \frac{M_c}{bh^2 f_{ct}} = T_c^* (\gamma - \xi) = \frac{(\gamma - \xi)^2}{\sqrt{1 + \frac{\beta_H}{\beta_0}}} \quad (8)$$

La existencia de una armadura introduce una nueva fuerza en nuestra sección, véase la Fig. 1b. El valor de esta fuerza,  $T_s$ , es igual a:

$$T_s = A_s \sigma_s \implies T_s^* = \frac{T_s}{bh f_{ct}} = \frac{A_s \sigma_s}{bh f_{ct}} = \rho \sigma_s^* \quad (9)$$

donde  $A_s$  es la cantidad de armadura,  $\rho$  la cuantía de armado y  $\sigma_s$  es la tensión de la barra de armado. Esta tensión se va a expresar de forma adimensionalizada,  $\sigma_s^*$  dividiéndola por la resistencia a tracción  $f_{ct}$  del hormigón. Esta nueva fuerza modifica el equilibrio de fuerzas en la sección, quedando éste como:

$$T_c + T_s = C_c \implies T_c^* + T_s^* = C_c^* \quad (10)$$

Así pues, la profundidad de la resultante de las compresiones, expresada en forma adimensional, es igual a:

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2n_f} (T_c^* + \rho \sigma_s^*) \quad (11)$$

El valor del momento durante el progreso de una fisura para una cierta profundidad,  $\xi$ , lo podemos expresar como:

$$M_t = M_c + M_s = T_c(y - z) + T_s(y - c) \quad (12)$$

ecuación que, en forma adimensionalizada, queda:

$$M_t^* = M_c^* + M_s^* = \frac{(\gamma - \xi)^2}{\sqrt{1 + \frac{\beta_H}{\beta_0}}} + \rho \sigma_s^* (\gamma - \xi) \quad (13)$$

La Eq. (13) refleja que el momento flector durante el progreso de la fisura es la suma de dos términos, uno que depende de las características del hormigón en fractura y otro que depende de la cuantía de armado, la tensión de la barra de acero y el recubrimiento.

Para hallar la tensión en el acero durante el proceso de propagación vamos a tener que plantear una ecuación adicional. Ésta se propone de tal forma que compatibilice el alargamiento de la armadura en la fisura con la apertura de la misma. Se va a considerar que el alargamiento de la barra es igual a la mitad de la apertura de fisura, véase la Fig. 2 y la Eq. (14).

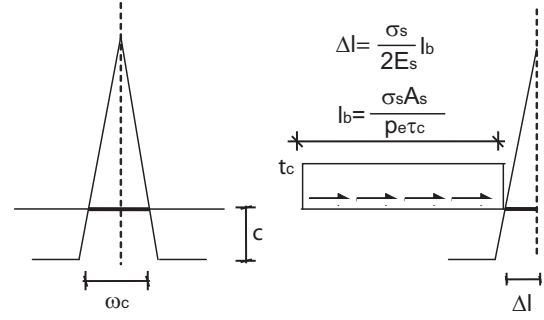


Figura 2: Ecuación de compatibilidad

$$\frac{\omega_c}{2} = \Delta l_s \quad (14)$$

donde  $\omega_c$  es la apertura de fisura y  $\Delta l_s$  es el incremento de longitud de la barra de acero respecto del hormigón. Se supone que la tracción en la barra es la misma a ambos lados de la fisura. La Eq. (14) se puede expresar de forma adimensionalizada dividiendo ambos términos del canto de la pieza.

$$\frac{\omega_c}{2h} = \frac{\Delta l_s}{h} \implies \frac{\omega_c^*}{2} = \Delta l_s^* \quad (15)$$

El termino correspondiente a la apertura de la fisura,  $\omega_c$  puede ser expresado a partir de la expresión dada por Tada [5]:

$$\frac{\omega_c^*}{2} = \frac{\omega_c}{2h} = 12M_t^* \frac{f_{ct}}{E_c} \xi f(\xi) \left(1 - \frac{\zeta}{\xi}\right) \quad (16)$$

donde  $f(\xi)$  es igual a:

$$0,76 - 2,28\xi + 3,87\xi^2 - 2,04\xi^3 + \frac{0,66}{(1 - \xi)^2} \quad (17)$$

El incremento de longitud de la barra es evaluado, véase la Fig. 2, mediante la expresión:

$$\Delta l_s^* = \frac{\Delta l_s}{h} = \frac{\sigma_s^2 A_s}{2\tau_c E_s p_e h} = (\sigma_s^*)^2 \frac{f_{ct}^2}{2\tau_c E_s p_e h} \quad (18)$$

donde  $\tau_c$  es la tensión rasante entre el acero y el hormigón y  $p_e$  es el perímetro de la barra. Sustituyendo las Eqs. (16) y (18) en la Eq. (15) la tensión en forma adimensional en las barras de acero se puede expresar como:

$$(\sigma_s^*)^2 = 24 M_t^* \eta^2 \beta_H \xi f(\xi) \left(1 - \frac{\zeta}{\xi}\right), \quad (19)$$

donde  $\eta$  es un parámetro relacionado con la adherencia, definido por [1]:

$$\eta = \sqrt{n_E \frac{\tau_c p e^{\ell_{ch}}}{f_{ct} A_s}}, \quad (20)$$

$n_E$  es el cociente entre el modulo de elasticidad del acero,  $E_s$ , y el modulo de elasticidad del hormigón,  $E_c$ .

Se considera un comportamiento elástico perfectamente plástico para el acero de los refuerzos, véase la Fig. 3. Es decir una vez que se alcanza el limite elástico,  $f_y$ , la tensión en la barra permanece constante.

Con todo ello nos queda un sistema formado por las Eqs. (11), (13) y (19). Para una cierta profundidad de fisura,  $\xi$  obtendremos el momento asociado a esa profundidad,  $M_t^*$ , la tension en el acero  $\sigma_s^*$  y la profundidad de la resultante del bloque comprimido,  $\gamma$ . Resuelto el sistema se puede evaluar la apertura de fisura a partir de la Eq. (16) y la profundidad del bloque comprimido relativa al canto mediante la expresión  $2(1 - \gamma)$ .

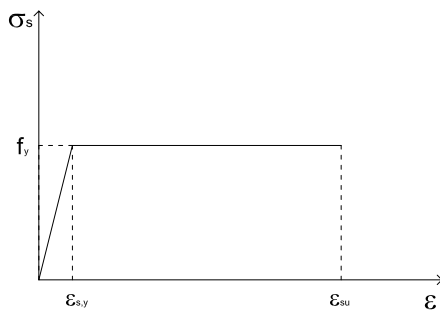


Figura 3: Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  del acero de armar

### 3. CRITERIOS DE FALLO Y ROTACIÓN PLÁSTICA DE LA SECCIÓN

El modelo presentado reproduce la evolución del momento resistido por una sección según avanza el proceso de fisuración, pero no indica cuándo se produce el fallo. Para fijar los puntos de fallo debemos introducir una serie de criterios adicionales.

La rotura de la sección se producirá bien por que se alcance un cierto valor de la deformación en la barra de acero,  $\epsilon_{su}$ , Fig. 3, o bien un valor máximo de la deformación en el hormigón,  $\epsilon_{cu}$ , Fig. 4.

En la zona fisurada, véase la parte inferior de la sección en la Fig. 5a, la ecuación de compatibilidad introducida nos permite evaluar la apertura de fisura y la longitud de armado movilizada, véase  $l_b$  en la Fig. 2,

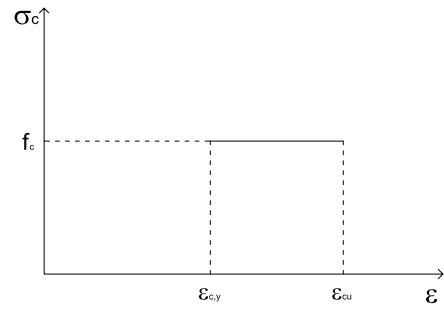


Figura 4: Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  en la zona comprimida de la sección de hormigón.

De esta forma, la deformación en el acero se puede evaluar mediante la expresión:

$$\epsilon_s = \frac{2\Delta l_s}{l_b} \quad (21)$$

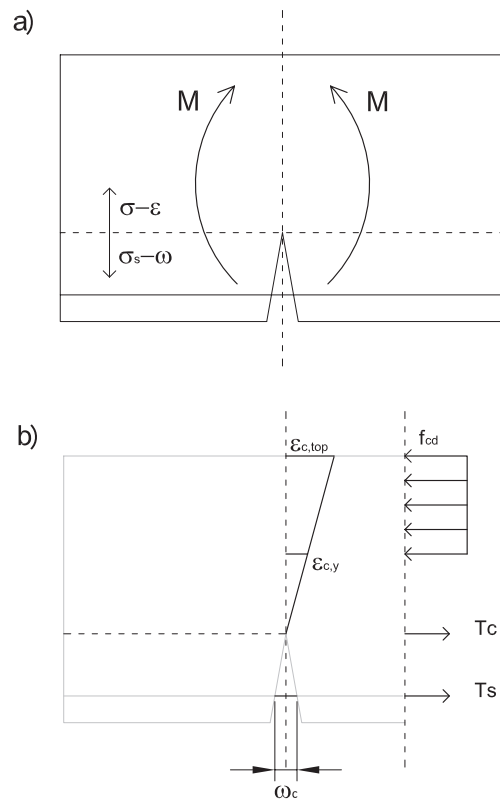


Figura 5: Criterios de fallo: a) Zona fisurada-no fisurada; b) Deformación en la zona comprimida

Los valores de  $\epsilon_{cu}$  y  $\epsilon_{su}$  vienen determinados en las distintas normativas. Valores comunes para estos parámetros son, p.e.,  $\epsilon_{cu}=0,0035$  y  $\epsilon_{su} = 0,01$ . En todo caso se podrían adoptar formulaciones más complejas en las que, por ejemplo, la deformación en el hormigón pueda depender de la profundidad del bloque comprimido, con el fin de tener en cuenta el efecto de tamaño de la zona comprimida. Una vez superado alguno de los límites de deformaciones considerados, la sección falla, y el

momento asociado a ese punto será el momento último resistente de la sección.

Complementariamente, el modelo permite determinar la capacidad de rotación de la sección, ya que para cada apertura de fisura se puede asociar un giro de la sección mediante la relación:

$$\tan \theta = \frac{\omega_c/2}{z-c} \simeq \theta = \frac{\omega_c/2}{z-c} \quad (22)$$

Dividiendo el numerador y el denominador de la expresión anterior por el canto del elemento,  $h$ , la Eq. (22) se puede expresar de forma adimensional:

$$\theta = \frac{\omega_c^*/2}{\xi - \zeta} \quad (23)$$

Una vez conocida la rotación de las secciones para los diferentes momentos aplicados en la sección, se puede evaluar la rotación plástica de la sección, parámetro de interés para determinar la ductilidad de la sección. La rotación plástica,  $\theta_{pl}$ , será igual a la rotación en el momento del fallo,  $\theta_u$ , menos la rotación cuando el acero alcanza el límite elástico,  $\theta_y$ .

$$\theta_{pl} = \theta_u - \theta_y \quad (24)$$

Así pues, la metodología propuesta permite evaluar en un único cálculo, la apertura de fisura para cada momento aplicado y la rotación plástica de una sección de hormigón armado.

#### 4. CONTRASTACIÓN CON RESULTADOS EXPERIMENTALES Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para contrastar la respuesta del modelo hemos comparado los resultados experimentales obtenidos por Ruiz Elices y Planas [6] con los del modelo propuesto. En concreto se han modelado los resultados para vigas con armadura adherente para tres tamaños diferentes, D1, 75 mm de canto, D2, 150mm de canto y D3, 300mm de canto. Estos ensayos se realizaron con cuantías bajas de armadura longitudinal por lo que únicamente se producía una fisura en la parte central de la viga. Se ha considerado que la rotación de la sección está provocada únicamente por el giro de la sección fisurada, despreciando el giro elástico del resto de secciones. En la Fig. 6 se muestran los resultados obtenidos.

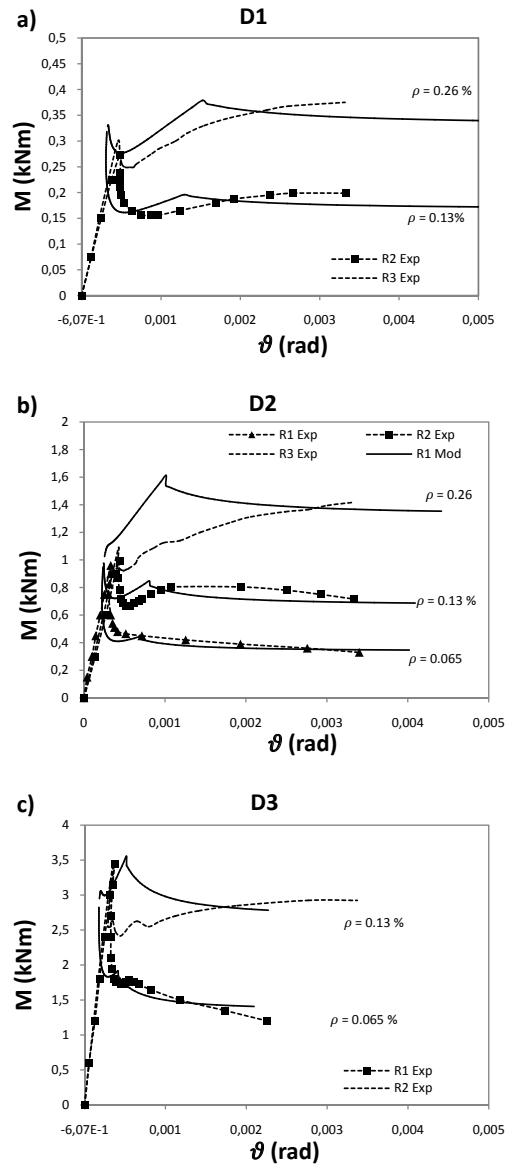


Figura 6: Contrastación experimental. Ensayos Ref. [6].

En la Fig. 6 se representa en abscisas la rotación de la sección y en ordenadas en momento flector sobre la sección. El modelo reproduce de forma correcta los momentos de fallo y la tendencia en cuanto a los giros últimos de las secciones.

Para cubrir un rango de cuantías de armado mayor se han contrastado los resultados del modelo con una campaña experimental realizada por Carpinteri et al. [7]. El rango de cuantías cubre desde secciones débilmente armadas hasta cuantías que inducen un fallo por compresiones excesivas. Se han contrastado los resultados para vigas de 0.4m y 0.6m de canto, véase la Fig 7. En abscisas se representa la rotación de la sección y en ordenadas en momento sobre la sección.

También en este caso los momentos son reproducidos de forma adecuada. En cuanto a la rotación de la sección, en general, los ensayos presentan una rotación mayor en ro-

tura que lo indicado por el modelo. Esto es debido a que en las vigas más armadas aparece más de una fisura y consecuentemente la rotación es superior a la calculada. En todo caso las tendencias observadas experimentalmente son reproducidas por el modelo.

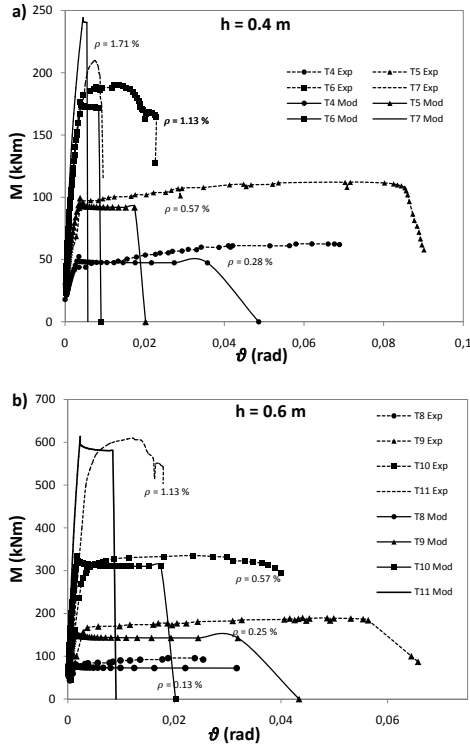


Figura 7: Contrastación experimental. Ensayos Ref. [7].

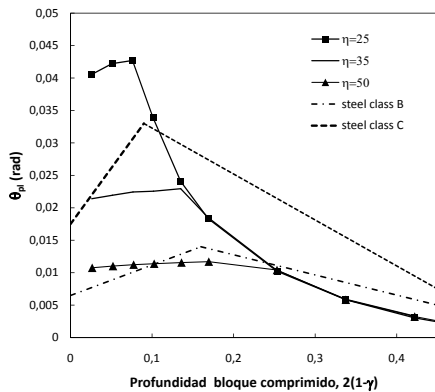


Figura 8: Influencia de la adherencia en la capacidad de rotación plástica.

En la Fig. 8 se muestra la influencia de la adherencia en la rotación plástica para una sección de hormigón armado. En abscisas se representa la profundidad del bloque comprimido y en ordenadas la rotación plástica. Cada curva se ha calculado para una sección manteniendo constante el parámetro que define la adherencia,  $\eta$ . Complementariamente se han dibujado los límites permitidos de giro plástico indicados en el Código Modelo para aceros de clases B y C. Para profundidades bajas, coincidentes en general con cuantías bajas, se observa como el aumento

de la adherencia disminuye la capacidad de rotación, ya que en esta zona el fallo se produce por la rotura del acero. Al aumentar la profundidad del bloque comprimido las curvas convergen debido a que el fallo se produce por compresiones excesivas y la influencia de la adherencia desaparece. Los resultados obtenidos se encuentran en el rango establecido por el Código Modelo.

## 5. CONCLUSIONES

El trabajo presentado propone una formulación analítica sencilla, basada en conceptos de Mecánica de Fractura, para estudiar el comportamiento de secciones de hormigón armado sometidas a flexión, con especial atención al proceso de progreso de una fisura y al modelado de la adherencia hormigón-acero. Los resultados del modelo se han contrastado con diferentes campañas experimentales, reproduciendo de forma adecuada las tendencias observadas en éstos. Con el modelo se pueden evaluar, en una sola comprobación, el momento último, la apertura de fisura para cada momento aplicado y la rotación plástica de una sección de hormigón armado.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración de Jesús Ángel Serrano García de la Plaza.

## REFERENCIAS

- [1] G. Ruiz, Propagation of a cohesive crack crossing a reinforcement layer. *International Journal of Fracture*, 111:265–282, 2001.
- [2] G. Ruiz, J.R. Carmona and D. Cendón Propagation of a cohesive crack through adherent reinforcement layers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:7237–7248, 2006.
- [3] A. Carpinteri (Ed.), *Minimum Reinforcement in Concrete Members*. Number 24 in ESIS Publication, Elsevier, London, 1999.
- [4] Z. P. Bažant, and J. Planas, *Fracture Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, Boca Raton. 1998.
- [5] H. Tada, P. Paris and G. Irwin. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Del Research Corporation, 1973.
- [6] G. Ruiz, M. Elices and J. Planas, Experimental study of fracture of lightly reinforced concrete beams. *Materials and Structures*, 31:683–691, 1998.
- [7] A. Carpinteri, M. Corrado, G. Mancini and M. Paggi, Size-scale effects on plastic rotational capacity of reinforced concrete beams. *ACI Structural Journal*, 106(6):887–896, 2009.