

APLICACIÓN DE UN MODELO DE PLASTICIDAD CÍCLICA MULTIAXIAL PARA CARGAS NO PROPORCIONALES

C. Madrigal, V. Chaves y A. Navarro

Dpto. Ing. Mecánica y Fabricación, Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla.
Avda. Camino de los Descubrimientos, s/n. 41092. Sevilla.
E-mail: cmadrigal@us.es

RESUMEN

El Método de las Deformaciones Locales es habitualmente utilizado en la industria para calcular la vida de componentes sometidos a cargas de fatiga de bajo número de ciclos. Sin embargo, su aplicación está limitada a cargas uniaxiales. La extensión del método al caso general de cargas multiaxiales, requiere la generalización de las ecuaciones de flujo plástico al caso multiaxial. Este trabajo se basa en un modelo de plasticidad que reproduce el comportamiento plástico estabilizado de metales sometidos a cargas multiaxiales, incorporando todos los ingredientes del Método de las Deformaciones Locales, como curvas cíclicas, ciclos de histéresis o efecto memoria. El modelo está basado en la idea de distancia en el espacio de tensiones, que se calcula a través un tensor métrico. Este tensor, que es una propiedad del material, puede ser calculado experimentalmente. Por otro lado, la regla de flujo emplea otra propiedad del material denominada módulo de endurecimiento. Este trabajo describe un procedimiento novedoso para el cálculo de estas propiedades en el caso de que la carga sea no proporcional. La aplicación de la metodología desarrollada se adapta a diferentes tipos de datos experimentales, ya que los datos disponibles varían según los ensayos realizados.

ABSTRACT

In the low cycle fatigue regime, the Local Strain Approach is commonly used in industry to effect fatigue life predictions. However, it is limited to the uniaxial loading case. The first step in the extension of this methodology to the multiaxial case requires the generalization of the plasticity flow equations. This work describes a constitutive model that reproduces the behaviour of stabilized metals subjected to multiaxial cyclic loads. It also incorporates all the common ingredients of the Local Strain Approach, such as cyclic curves, hysteresis loops and memory effect. The model is based on the idea of distance in the stress space which is calculated with a metric tensor. This metric tensor is a material property and can be empirically determined. In addition, the flow rule employs another material property known as endurance modulus. The procedures developed to calculate both material properties from experimental data are shown for the non-proportional loading case. The application of these techniques provides a variety of tools that employs different experimental input data, as the available data may not always be completed.

PALABRAS CLAVE: Fatiga multiaxial, plasticidad cíclica, Método de las Deformaciones Locales.

1 INTRODUCCIÓN

El Método de las Deformaciones Locales es ampliamente utilizado en sectores de la industria de la automoción, de la aeronáutica y de la aeroespacial para el cálculo de vida a fatiga a bajo número de ciclos [1–3]. Cuando la carga es uniaxial, el uso de la curva de comportamiento cíclico junto con los ciclos de histéresis, la regla de Neuber, el efecto memoria y la curva ϵ -N, permite calcular las tensiones y deformaciones locales en el borde de la entalla.

En trabajos anteriores [4–9] se ha presentado un modelo de plasticidad que pretende ser empleado en la generalización de la metodología sugerida en el Método de las Deformaciones Locales al caso multiaxial. El modelo es capaz de simular el comportamiento bajo cargas multiaxiales a partir de las curvas de comportamiento cíclico halladas de ensayos uniaxiales.

Sin embargo, cuando un material se somete a cargas no-proporcionales, puede experimentar un endurecimiento adicional. Si esto ocurre, es necesario reajustar los parámetros del modelo para que pueda recoger este cambio de comportamiento, ya que la curva obtenida de un ensayo uniaxial no aporta información sobre la cantidad de endurecimiento extra que experimenta el material.

Por este motivo, se ha desarrollado una metodología para el cálculo de los parámetros del modelo para el caso en que las cargas sean no-proporcionales. Esta metodología se ha planteado de forma genérica para que se adapte con facilidad a distintos tipos de datos experimentales, ya que los estudios experimentales disponibles en la literatura, no siempre se componen de los mismos resultados. Por último se incluye la aplicación de los procedimientos descritos para la caracterización del material de los clásicos resultados experimentales de Lamba y Sidebottom [10].

2 MODELO

A continuación se incluye un breve repaso de las características más importantes del modelo, necesario para introducir el presente trabajo. Este resumen se va a limitar al caso particular de una carga combinada de tracción-torsión, ya que es un caso de carga multiaxial suficientemente sencillo como para ser reproducido en ensayos experimentales. Una explicación más extensa y general del modelo puede encontrarse en [4-9].

Como en todo modelo de plasticidad cíclica, la primera componente es el criterio de fluencia, que establece el comienzo de la plastificación cuando la longitud del vector tensión alcanza un determinado valor crítico. Como es de esperar, este valor crítico depende del material en cuestión. La novedad radica en que la forma de medir la longitud del vector tensión también depende del material.

De esta forma, en materiales isotrópicos, que se ajustan a la métrica de von Mises, la longitud del vector tensión en un ensayo de tracción-torsión, donde las únicas componentes de tensión no nulas son la tensión longitudinal σ y la tangencial τ , se mide mediante la siguiente métrica

$$|\sigma| = \sqrt{\frac{2}{3}\sigma^2 + 2\tau^2} \quad (1)$$

Esta cantidad está relacionada con la tensión equivalente de von Mises, $\bar{\sigma}_{vM}$, de la forma

$$|\sigma| = \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma}_{vM} \quad (2)$$

Por otro lado, es bien sabido que ciertos materiales se ajustan mejor al criterio de Tresca. Para estos materiales, por analogía, la forma de medir la longitud del vector tensión será

$$|\sigma| = \sqrt{\frac{1}{2}\sigma^2 + 2\tau^2} \quad (3)$$

que está relacionada con la tensión equivalente de Tresca, $\bar{\sigma}_T$, como sigue

$$|\sigma| = \sqrt{\frac{2}{4}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \sqrt{\frac{2}{4}}\bar{\sigma}_T \quad (4)$$

En general, un material cualquiera tendrá un comportamiento intermedio entre ambos criterios y para ellos la medida de la longitud del vector tensión, que denominaremos en lo que sigue Q , será función de dos parámetros que se determinan de forma experimental:

$$Q = |\sigma| = \sqrt{g_\sigma\sigma^2 + 2g_\tau\tau^2} \quad (5)$$

El segundo bloque, o regla de endurecimiento, relaciona la cantidad de deformación plástica que se produce

cuando la longitud del vector tensión se incrementa un diferencial dQ

$$|d\varepsilon^p| = \Phi(Q)dQ \quad (6)$$

donde se ha introducido una nueva función, $\Phi(Q)$, denominada *módulo de endurecimiento*, que también puede deducirse de datos experimentales.

La última componente del modelo de comportamiento, la regla de flujo, se obtiene de manera natural de las dos anteriores. Por un lado, la ecuación (5) indica que la superficie de plastificación es una circunferencia centrada en el origen en los ejes $\sqrt{g_\sigma\sigma} - \sqrt{2g_\tau\tau}$. Por otro lado, la (6) indica que solo se produce deformación plástica cuando se incrementa la longitud del vector tensión, o lo que es lo mismo, cuando el estado tensional se aleja del origen. Todo esto parece indicar que la deformación plástica debe definirse invocando la regla de la normal

$$d\varepsilon^p = \Phi(Q)dQ\mathbf{n} \quad (7)$$

donde \mathbf{n} es el gradiente a la superficie de fluencia

$$\mathbf{n} = \frac{\partial|\sigma|}{\partial\sigma} = \frac{\partial Q}{\partial\sigma} \quad (8)$$

Para el caso particular que nos ocupa, una carga combinada de tensión-torsión, calculamos las componentes del vector normal derivando parcialmente la ecuación (5)

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\partial Q}{\partial\sigma} = \frac{g_\sigma\sigma}{Q} \\ n_2 &= \frac{\partial Q}{\partial\tau} = \frac{2g_\tau\tau}{Q} \end{aligned} \quad (9)$$

y con ellas obtenemos el incremento del módulo de vector tensión

$$dQ = \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{g_\sigma\sigma}{Q}d\sigma + \frac{2g_\tau\tau}{Q}d\tau \quad (10)$$

Introduciendo (9) y (10) en (7) se obtienen los incrementos de deformación plástica

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon^p \\ d\gamma^p \end{bmatrix} = \frac{\Phi(Q)}{Q^2} \begin{bmatrix} g_\sigma^2\sigma^2 & 2g_\sigma g_\tau\sigma\tau \\ 2g_\sigma g_\tau\sigma\tau & 4g_\tau^2\tau^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma \\ d\tau \end{bmatrix} \quad (11)$$

y añadiendo los términos elásticos de la deformación mediante la ley de Hooke se llega a la deformación total

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon \\ d\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} + \frac{\Phi(Q)}{Q^2}g_\sigma^2\sigma^2 & \frac{2\Phi(Q)}{Q^2}g_\sigma g_\tau\sigma\tau \\ \frac{2\Phi(Q)}{Q^2}g_\sigma g_\tau\sigma\tau & \frac{1}{G} + 4\frac{\Phi(Q)}{Q^2}g_\tau^2\tau^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma \\ d\tau \end{bmatrix} \quad (12)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales se puede integrar para hallar la evolución de las deformaciones en función de las tensiones o puede ser invertido para simular

un ensayo controlado en deformación y obtener las tensiones a partir de las deformaciones impuestas

$$d\sigma = \frac{\left(\frac{1}{G} + 4g_\tau^2\tau^2 \frac{\Phi(Q)}{Q^2}\right) d\varepsilon - 2g_\sigma g_\tau \sigma \tau \frac{\Phi(Q)}{Q^2} d\gamma}{\frac{1}{EG} + \frac{\Phi(Q)}{Q^2} \left(\frac{4g_\tau^2\tau^2}{E} + \frac{g_\sigma^2\sigma^2}{G}\right)} \quad (13)$$

$$d\tau = \frac{-2g_\sigma g_\tau \sigma \tau \frac{\Phi(Q)}{Q^2} d\varepsilon + \left(\frac{1}{E} + g_\sigma^2\sigma^2 \frac{\Phi(Q)}{Q^2}\right) d\gamma}{\frac{1}{EG} + \frac{\Phi(Q)}{Q^2} \left(\frac{4g_\tau^2\tau^2}{E} + \frac{g_\sigma^2\sigma^2}{G}\right)}$$

Estas ecuaciones son válidas siempre que $dQ = d|\sigma|$ sea positivo. Si fuera nulo o negativo nos encontraríamos ante una carga neutra o una descarga que por simplicidad omitimos en este resumen.

3 CARACTERIZACIÓN DEL MATERIAL

La aplicación del modelo en la simulación del comportamiento de un material real requiere el cálculo de los parámetros característicos descritos en la sección anterior. En concreto, es necesario hallar las constantes de la métrica, g_σ y g_τ , así como el módulo de endurecimiento, $\Phi(Q)$.

En caso de cargas proporcionales, trabajos previos [8] describen la metodología para el cálculo de estos parámetros a partir de las curvas cíclicas del material. Esto es así ya que el objetivo de este modelo es la aproximación del comportamiento estabilizado del material para ser utilizado en el cálculo de la vida a fatiga. Tiene por tanto sentido despreciar los efectos transitorios y utilizar las curvas cíclicas estabilizadas para caracterizar el material. Sin embargo, es bien conocido que la cantidad de endurecimiento experimentado por el material bajo cargas proporcionales puede ser diferente al que aparece bajo cargas no-proporcionales [11]. Es más, la cantidad de endurecimiento adicional depende del grado de no-proporcionalidad de la carga, siendo el mayor el debido a una carga de tensión-torsión desfasadas 90° [12]. Por este motivo, es interesante estudiar este caso, que corresponde al comportamiento extremo. Para cargas no-proporcionales con menor desfase, el comportamiento estará comprendido entre éste y el caso proporcional.

Según el modelo, estas historias de carga pueden ser simuladas mediante la ecuación (13) obtenida en el apartado anterior, y siempre que no se produzca una descarga. Ahora bien, teniendo en cuenta que el módulo de endurecimiento, $\Phi(Q)$, aumenta con el módulo del vector tensión, Q , y que este crecimiento es muy rápido cuando el valor de Q se aproxima a un cierto nivel de saturación, si los niveles de tensión alcanzan estos valores elevados próximos a la saturación, los términos $1/E$, $1/G$ y $1/EG$ serán despreciables frente a los que multiplican a $\Phi(Q)$, que serán varios órdenes de magnitud mayor. Este es precisamente el caso de una carga tensión-torsión desfasada

90° . Eliminando estos términos, las ecuaciones se reducen a

$$d\sigma = \frac{2g_\tau\tau}{\frac{4g_\tau^2\tau^2}{E} + \frac{g_\sigma^2\sigma^2}{G}} (2g_\tau\tau d\varepsilon - g_\sigma\sigma d\gamma) \quad (14)$$

$$d\tau = \frac{-g_\sigma\sigma}{\frac{4g_\tau^2\tau^2}{E} + \frac{g_\sigma^2\sigma^2}{G}} (2g_\tau\tau d\varepsilon - g_\sigma\sigma d\gamma)$$

de donde

$$\frac{d\sigma}{2g_\tau\tau} = \frac{d\tau}{-g_\sigma\sigma} \rightarrow g_\sigma\sigma d\sigma + 2g_\tau\tau d\tau = 0 \quad (15)$$

Comparando esta igualdad con la ecuación (10), se tiene que

$$QdQ = 0 \rightarrow dQ = 0 \quad (16)$$

que indica la existencia de órbitas estables en las soluciones de las ecuaciones diferenciales de comportamiento. A la vista de la ecuación (15), que podría reescribirse como

$$\sqrt{g_\sigma\sigma}d(\sqrt{g_\sigma\sigma}) + \sqrt{2g_\tau\tau}d(\sqrt{2g_\tau\tau}) = 0. \quad (17)$$

que es la ecuación de una circunferencia en forma diferencial en los ejes $(\sqrt{g_\sigma\sigma} - \sqrt{2g_\tau\tau})$, se deduce que el vector tensión no cambia de magnitud pero se encuentra rotando como consecuencia del desfase entre las deformaciones. Este resultado concuerda con los modelos teóricos y las observaciones experimentales [11] y proporciona un sencillo método para ajustar las constantes de la métrica válidos para simulaciones de cargas no-proporcionales.

3.1 Ajuste de las constantes de la métrica

Como se ha comentado más arriba, la ecuación (17) es la ecuación de una circunferencia de radio R

$$(\sqrt{g_\sigma\sigma})^2 + (\sqrt{2g_\tau\tau})^2 = R^2 \quad (18)$$

cuyos cortes con los ejes de coordenadas son equidistantes, por lo que

$$\sqrt{g_\sigma\sigma} = \sqrt{2g_\tau\tau} \quad (19)$$

estableciéndose así una relación entre las constantes de la métrica:

$$\frac{g_\tau}{g_\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2 \quad (20)$$

Dado que la ecuación (13) no depende del valor concreto de esta dos constantes, sino de la relación entre ellas, podemos tomar $g_\tau = 1$ que, como se verá en el siguiente apartado, es bastante conveniente.

3.2 Ajuste del módulo de endurecimiento

En trabajos previos se ha mostrado que el módulo de endurecimiento puede ser fácilmente hallado a partir de

los datos de un ensayo uniaxial de tracción [8]. El procedimiento entonces propuesto sigue siendo válido para caracterizar el comportamiento no-proporcional siempre que la curva uniaxial que se emplee se haya obtenido después de haber endurecido el material, sometiéndolo a una carga no-proporcional, por ejemplo, a una carga de tensión-torsión desfasadas 90°. De hecho, en caso de tener esta curva disponible, esta sería la manera más apropiada de calcularlo. No obstante, analizando los datos experimentales de la literatura, no es habitual encontrar esta curva por lo que es en ocasiones necesario utilizar un método aproximado alternativo.

Una curva que sí suele incluirse en los trabajos experimentales es la curva equivalente en alguna de sus variantes, que, aunque no sea una curva de comportamiento propiamente dicha, es habitualmente utilizada para caracterizar el comportamiento estabilizado del material. De esta forma, una alternativa sencilla al método anteriormente descrito consiste en utilizar la curva equivalente en lugar de la obtenida en un ensayo uniaxial de tracción, y utilizarla como si de una curva uniaxial se tratase. Esto tiene un cierto sentido ya que en un ensayo uniaxial, las magnitudes equivalentes habituales de von Mises y Tresca coinciden con las tensiones y deformaciones. Si sólo existe una tensión σ , se tiene que

$$Q = \sqrt{g_\sigma} \sigma \rightarrow dQ = \sqrt{g_\sigma} d\sigma \quad (21)$$

y

$$n_1 = \frac{g_\sigma \sigma}{\sqrt{g_\sigma} \sigma} = \sqrt{g_\sigma} \quad (22)$$

con esto la deformación plástica viene dada por

$$d\varepsilon^P = \Phi(Q) dQ n_1 = \Phi(Q) g_\sigma d\sigma \quad (23)$$

y el módulo de endurecimiento se obtiene a partir de la pendiente de la parte plástica de la curva equivalente $h = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^P}$ como

$$\Phi(Q) = \frac{1}{g_\sigma h} \quad (24)$$

Recordemos que este método supone que la curva equivalente obtenida de un ensayo no-proporcional coincide con la curva equivalente de un ensayo uniaxial realizado después de dicho ensayo no-proporcional. Sin embargo, esto no siempre es cierto, por lo que es conveniente plantear otro procedimiento que sirva para obtener el módulo de endurecimiento de una curva equivalente, sin suponerla coincidente con la del ensayo uniaxial. Para ello, se va a suponer que la curva equivalente de partida ha sido hallada en un ensayo tensión-torsión 90° fuera de fase, ya que, como se ha visto anteriormente, esta combinación causa la mayor cantidad de endurecimiento adicional posible.

Las curvas equivalentes más habituales son la que repre-

senta la tensión y deformación de von Mises

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{vM} &= \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\gamma^2} \\ \bar{\sigma}_{vM} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \end{aligned} \quad (25)$$

y la proveniente del criterio de Tresca

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_T &= \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4}{9}\gamma^2} \\ \bar{\sigma}_T &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Según el modelo aquí descrito, las magnitudes equivalentes se calculan mediante el módulo de la tensión y de la deformación, quedando

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \sqrt{\frac{1}{g_\sigma} \varepsilon^2 + \frac{1}{2g_\tau} \gamma^2} \\ \bar{\sigma} &= \sqrt{g_\sigma \sigma^2 + 2g_\tau \tau^2} \end{aligned} \quad (27)$$

De forma general, estas curvas equivalentes se pueden unificar en una sola con la siguiente notación

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \sqrt{c_\varepsilon \varepsilon^2 + c_\gamma \gamma^2} \\ \bar{\sigma} &= \sqrt{c_\sigma \sigma^2 + c_\tau \tau^2} \end{aligned} \quad (28)$$

Ahora bien, como hemos mencionado más arriba, estas curvas se suponen obtenidas de ensayos controlados en deformación donde las señales son proporcionales y están desfasadas 90°

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_a \cos \omega t \\ \gamma &= \gamma_a \sin \omega t = k \varepsilon_a \sin \omega t \end{aligned} \quad (29)$$

Estas deformaciones producirán unas tensiones que estarán desfasadas un cierto ángulo con respecto a las deformaciones y que, una vez estabilizadas, sus amplitudes estarán relacionadas según la ecuación (20)

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_a \cos(\omega t + \phi) \\ \tau &= \tau_a \sin(\omega t + \phi) = \sqrt{\frac{g_\sigma}{2g_\tau}} \sigma_a \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (30)$$

Introduciendo (29) y (30) en (28) se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \sqrt{c_\varepsilon \varepsilon_a^2 \cos^2 \omega t + c_\gamma k^2 \varepsilon_a^2 \sin^2 \omega t} \\ \bar{\sigma} &= \sqrt{c_\sigma \sigma_a^2 \cos^2(\omega t + \phi) + c_\tau \frac{g_\sigma}{2g_\tau} \sigma_a^2 \sin^2(\omega t + \phi)} \end{aligned} \quad (31)$$

que son ondas de pequeña amplitud que oscilan sobre un valor medio. Si ignoramos estas oscilaciones, los valores medios de las señales quedan en forma diferencial

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{c_\varepsilon} + \sqrt{c_\gamma k^2}}{2} d\varepsilon_a \\ d\bar{\sigma} &= \frac{\sqrt{c_\sigma} + \sqrt{c_\tau \frac{g_\sigma}{2g_\tau}}}{2} d\sigma_a \end{aligned} \quad (32)$$

Por otro lado, el incremento de deformación axial plástica puede hallarse sustituyendo (30) y su derivada en (11), de forma que

$$d\varepsilon^p = \frac{\Phi(Q)}{Q^2} g_\sigma^2 \sigma_a^2 \cos(\omega t + \phi) d\sigma_a \quad (33)$$

es decir que es una señal senoidal desfasada tanto como la tensión

$$d\varepsilon^p = d\varepsilon_a \cos(\omega t + \phi) \quad (34)$$

Por último, unificando la relación entre las magnitudes equivalentes y las amplitudes de la deformación y la tensión, recogidas en la ecuación (32), con(33) y (34), se llega a

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{\sqrt{c_\varepsilon} + \sqrt{c_\gamma k^2}} = \Phi(Q) g_\sigma \frac{d\bar{\sigma}}{\sqrt{c_\sigma} + \sqrt{c_\tau \frac{g_\sigma}{2g_\tau}}} \quad (35)$$

de donde se obtiene la ecuación general del módulo de endurecimiento

$$\Phi(Q) = \frac{1}{g_\sigma h} \left(\frac{\sqrt{c_\sigma} + \sqrt{c_\tau \frac{g_\sigma}{2g_\tau}}}{\sqrt{c_\varepsilon} + \sqrt{c_\gamma k^2}} \right) \quad (36)$$

donde h es la pendiente de la curva equivalente $h = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}}$.

4 APLICACIÓN Y RESULTADOS

La metodología propuesta en el apartado anterior ha sido empleada para reproducir los clásicos resultados experimentales obtenidos por Lamba y Sidebottom [10]. Se ha escogido este estudio porque incluye los resultados de un ensayo de tracción realizado después de haber endurecido no-proporcionalmente el material, cosa poco habitual en la literatura. Esto permite comparar los tres métodos propuestos para el cálculo del módulo de endurecimiento. Además, los resultados incluyen la curva cíclica obtenida con una deformación torsional desfasada 90° con respecto a la axial y de amplitud $\sqrt{3}$ veces superior, que es el supuesto aquí analizado.

4.1 Ajuste de las constantes de la métrica

En los resultados en tensiones del ensayo fuera de fase se distingue claramente la órbita estable que predice la ecuación (17), cuyas intersecciones con los ejes $\sigma - \tau$ se producen para una tensión axial de 214 MPa y una tensión tangencial de 107 MPa. Tomando $g_\tau = 1$, la ecuación (20) dice que

$$g_\sigma = 2 \left(\frac{107}{214} \right)^2 = \frac{1}{2} \quad (37)$$

Con estos valores de las constantes, la ecuación (5) coincide con la (3), es decir, el material se ajusta a la métrica de Tresca. Este resultado coincide con las conclusiones de los autores [10].

4.2 Ajuste del módulo de endurecimiento

Una vez obtenida la métrica, para el cálculo del módulo de endurecimiento a partir de la curva obtenida del ensayo uniaxial después de haber sometido a la probeta a un endurecimiento fuera de fase a 90° o a partir de la curva cíclica suponiéndola uniaxial, sólo es necesario el cálculo de las pendientes de las curvas (véase (24)). Para ello se pueden emplear métodos numéricos o ajustar curvas matemáticas derivables, como el ajuste habitual de Ramberg-Osgood. La Figura 1 muestra las dos curvas mencionadas, que son aproximadamente coincidentes.

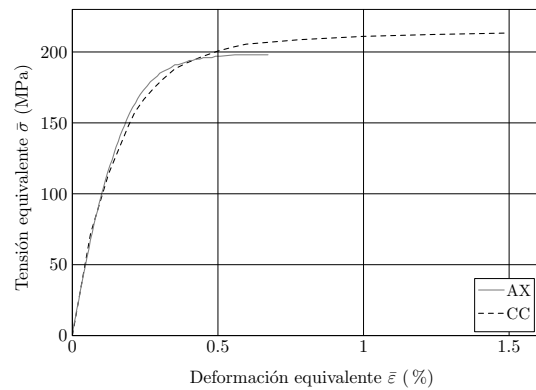


Figura 1. Comparación de la curva obtenida de un ensayo uniaxial después de endurecerse 90° fuera de fase (AX) con la curva cíclica equivalente de dicho ensayo fuera de fase (CC).

Para emplear el tercer método, deben identificarse los parámetros de la ecuación (36). Teniendo en cuenta que la curva cíclica proporcionada es una curva equivalente de Tresca [13] y sabiendo que la deformación tangencial es $\sqrt{3}$ veces la axial, se deduce fácilmente que

$$c_\varepsilon = c_\sigma = 1 \quad c_\gamma = \frac{4}{9} \quad c_\tau = 4 \quad k = \sqrt{3}$$

con lo que

$$\Phi(Q) = \frac{2}{h \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} \quad (38)$$

Las tres curvas obtenidas por los tres métodos se comparan en la Figura 2 si bien, para este caso concreto, las obtenidas a partir de la curva equivalente son casi coincidentes. Esto es debido en parte a que el material se ajusta a la métrica de Tresca, que es precisamente la empleada por los autores en la curva cíclica equivalente. Esta coincidencia hace que el término que multiplica a $\frac{1}{g_\sigma h}$ en la ecuación (36) sea cercano a uno, que llevaría a los mismos resultados que proporciona la ecuación (24). Puede observarse, sin embargo, que la curva obtenida a partir del ensayo uniaxial sí difiere bastante de las otras dos,

sobre todo en el nivel de tensiones en el que cambia la pendiente. Esto es debido a las diferencias existentes entre las curvas de partida y tiene como consecuencia que las simulaciones realizadas con esta curva predicen unos valores de tensión estabilizada inferiores.

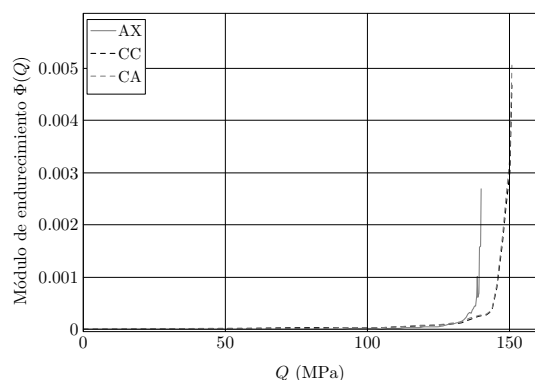


Figura 2. Comparación de los módulos de endurecimiento obtenidos por los tres métodos propuestos: a partir de curva obtenida de un ensayo uniaxial después de endurecerse 90° fuera de fase (AX); a partir de la curva cíclica equivalente de un ensayo 90° fuera de fase (CC) o a partir de esta misma curva suponiéndola axial (CA).

5 CONCLUSIONES

Se ha propuesto una metodología que permite la aplicación de un modelo de plasticidad cíclica en casos de carga multiaxial no-proporcional. Los procedimientos desarrollados requieren del uso de datos experimentales que están habitualmente disponibles en la literatura. Estos datos son la curva cíclica del material o la respuesta de un ensayo uniaxial de tracción de una probeta previamente endurecida en fuera de fase y la respuesta en tensiones de este ensayo fuera de fase.

La aplicación de estas técnicas a un conjunto de resultados experimentales pone de manifiesto las diferencias de los resultados obtenidos empleando la curva cíclica para modelar el comportamiento estabilizado del material o empleando la curva de un ensayo de tracción hallada con el material previamente endurecido. Las implicaciones que esto tiene deben estudiarse más profundamente en trabajos futuros.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer la financiación recibida del Ministerio de Educación de España a través del proyecto DPI2014-56904-P.

REFERENCIAS

- [1] R. M. Wetzel, "Fatigue under complex loading: Analyses and experiments," in *Advances in Engineering* (A. in Engineering, ed.), Society of Automotive Engineers, 1977.
- [2] N. E. Dowling, *Mechanical behavior of materials. Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue*. Prentice-Hall, 1993.
- [3] J. A. Bannantine, J. J. Comer, and J. Handrock, *Fundamentals of Metals Fatigue Analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1990.
- [4] A. Navarro, J. M. Giráldez, and C. Vallellano, "A constitutive model for elastoplastic deformation under variable amplitude multiaxial cyclic loading," *International Journal of Fatigue*, vol. 27, pp. 838–846, 2005.
- [5] A. Navarro and C. Madrigal, "Ecuaciones de flujo plástico para el Método de las Deformaciones Locales con carga multiaxial," *Anales de Mecánica de la Fractura*, vol. 26-II, pp. 417–423, 2009.
- [6] C. Madrigal and A. Navarro, "Distancia en el espacio de tensiones y criterios de plastificación," *Anales de Mecánica de la Fractura*, vol. 28-II, pp. 571–576, 2011.
- [7] C. Madrigal, A. Navarro, and V. Chaves, "Numerical implementation of a multiaxial cyclic plasticity model for the local strain method in low cycle fatigue," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 80, pp. 111–119, 2015.
- [8] C. Madrigal, A. Navarro, and V. Chaves, "Biaxial cyclic plasticity experiments and application of a constitutive model for cyclically stable material behaviour," *International Journal of Fatigue*, vol. 83, pp. 240–252, 2016.
- [9] C. Madrigal, A. Navarro, and V. Chaves, "Plasticity theory for the multiaxial local strain-life method," *International Journal of Fatigue*, vol. 100, pp. 575–582, 2017.
- [10] H. S. Lamba and O. M. Sidebottom, "Cyclic plasticity for nonproportional paths: Part I - cyclic hardening, erasure of memory, and subsequent strain hardening experiments," *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 100, pp. 96–103, 1978.
- [11] D. F. Socie and G. B. Marquis, *Multiaxial fatigue*. SAE International, 2000.
- [12] K. Kanazawa, M. K. J., and M. W. Brown, "Cyclic deformation of 1steel under out-of-phase loads," *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, vol. 2, pp. 217–228, 1979.
- [13] D. L. McDowell, D. F. Socie, and Lamba, "Multiaxial nonproportional cyclic deformation," *ASTM STP 770, American Society for Testing and Materials*, vol. Low-cycle fatigue and life predictions, pp. 500–518, 1982.