

EL MÉTODO DE LA DERIVADA DE RIGIDEZ COMO UN MÉTODO DISCRETO ANALÍTICO DE SENSIBILIDADES DE FORMA Y SU APLICACIÓN A MODOS MIXTOS EN MFEL

E. Giner, F.J. Fuenmayor, A. Besa, J.J. Ródenas

Universidad Politécnica de Valencia
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
Camino de Vera s/n, 46022 Valencia

Resumen. En este trabajo se aplica un método discreto analítico de sensibilidades (SDSA) al método de la derivada de rigidez que evita el error propio de diferencias finitas. Se demuestra que este enfoque es equivalente a la integral J evaluada numéricamente mediante elementos finitos a través de la integral de dominio asociada (método EDI). Se comprueba, mediante ejemplos 2D en modo mixto, que su aplicación directa a través de la descomposición de campos para obtener G_I y G_{II} da lugar a resultados que son en general más precisos con el método propuesto. Al mismo tiempo se resalta la importancia del campo de velocidades tomado y se dan indicaciones sobre su elección.

Abstract. In this work a shape design sensitivity analysis (SDSA) is applied to the stiffness derivative method so that the error inherent in the finite difference procedure is avoided. This approach is shown to be equivalent to the well-known J -integral when the latter is numerically implemented through its equivalent domain integral (EDI method) for a given finite element solution. It is verified that its direct application in 2D mixed mode problems of LEFM through the field decomposition technique yields estimates for G_I and G_{II} which are in general more accurate for the proposed method. The importance of the velocity field is also remarked and some suggestions for its choice are given.

1. INTRODUCCIÓN

De entre los numerosos métodos que permiten obtener parámetros caracterizantes en mecánica de la fractura elástico lineal (MFEL) mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF), los denominados *métodos indirectos* están considerados como los más precisos y eficientes [1-4]. Dichos métodos se basan en un enfoque global (o energético) del problema y en ellos la tasa de liberación de energía G es el parámetro caracterizante. En contraste, los llamados *métodos directos* estiman de forma local el valor del factor de intensidad de tensiones K sin necesidad de calcular la tasa de liberación de energía asociada y necesitan por ello de un mayor grado de discretización en el entorno de grieta. En general

todos ellos se pueden considerar como técnicas de postproceso aplicables tras un análisis numérico, como puede ser EF.

Entre los métodos indirectos más utilizados se encuentran ciertas integrales de contorno, como la integral J de Rice [5], el método de la derivada de la matriz de rigidez, propuesto independientemente por Parks [2] y Hellen [3], el método de la integral de dominio equivalente (Equivalent Domain Integral, EDI) [4, 6-8] y otros métodos basados en el cierre virtual de grieta [9, 10].

Uno de los grandes inconvenientes que presentan los métodos energéticos frente a los métodos locales en

MFEL es la dificultad de obtener estimaciones independientes del factor de intensidad de tensiones (FIT) asociado a cada modo de carga K_I , K_{II} y K_{III} en problemas en los que éstos aparecen combinados (modo mixto). Esto es debido precisamente a su carácter *global*, que no se presta al cálculo por separado de la tasa de liberación de energía asociada a cada modo de carga G_I , G_{II} y G_{III} . Diversos autores han propuesto técnicas para “separar” los modos en problemas lineales en modo mixto haciendo uso de integrales de contorno, generalmente restringidas al caso 2D. Entre ellos se encuentran fundamentalmente las técnicas de descomposición de campos [11-13] y la utilización de las integrales J_k ($k = 1, 2$) [14] y sus relaciones con K_I , K_{II} [15-17], además de otros como el método de la integral M_I [18]. Otros autores han combinado la aplicación de dichas técnicas de separación de modos con el método de integral de dominio EDI [19,20], que las hace especialmente interesantes en el análisis de problemas tridimensionales.

Por otro lado, ciertos métodos energéticos empleados en la estimación de G o J mediante el MEF (en particular todos aquellos relacionados con el concepto de *extensión virtual de grieta*) son susceptibles de ser interpretados como un análisis de sensibilidades de diseño de forma (SDSA). Las técnicas propias del análisis de sensibilidades de diseño de forma se basan en un dominio cuyo contorno cambia a través de una o más variables de diseño. En el caso de su aplicación a mecánica de la fractura se interpreta que sólo existe una variable de diseño: el área o longitud de grieta, cuya extensión da lugar a un cambio en el contorno (forma) del dominio. Es por ello que las técnicas propias del análisis de sensibilidades son de aplicación en mecánica de la fractura.

El planteamiento propuesto en este trabajo hace uso de un método discreto analítico de sensibilidades para evaluar analíticamente la derivada de la matriz de rigidez, evitando la aproximación que introduce su estimación clásica mediante diferencias finitas. Se demuestra que es exactamente equivalente al método EDI cuando éste ha de ser implementado numéricamente mediante el MEF. Posteriormente, la mejora en el método es aplicada a problemas 2D en modo mixto a través de la técnica de descomposición de campos, dando lugar en general a mejores estimaciones de G_I , G_{II} que las obtenidas según los procedimientos que aplican la descomposición de campos directamente a la integral de contorno J [11-13] o la integral de dominio EDI [19,20]. Por último, y dado que el concepto de campo de velocidades es fundamental en todo SDSA, se dan algunas indicaciones acerca de su elección.

2. EL MÉTODO DE LA DERIVADA DE RIGIDEZ COMO UN MÉTODO DISCRETO ANALÍTICO DE SENSIBILIDADES

El método de la derivada de rigidez en MFEL [2,3] es un método computacionalmente muy eficiente. Está basado en el concepto de extensión virtual de grieta y por tanto puede ser interpretado como un análisis de sensibilidades de diseño de forma en el que la variable de diseño es la longitud o área de grieta. Para un problema 2D con espesor unidad y en ausencia de fuerzas másicas y fuerzas superficiales aplicadas sobre las caras de grieta, el método se ha formulado tradicionalmente del siguiente modo:

$$G = -\frac{d\Pi}{da} \approx -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta a} \mathbf{u} \quad (1)$$

donde G es la tasa de liberación de energía, Π es la energía potencial total del sistema, a es la longitud de grieta (*variable de diseño*), \mathbf{u} es el vector global de desplazamientos nodales solución del problema de EF y \mathbf{K} es la matriz de rigidez global de la discretización correspondiente. Notar que en (1) se supone que el cálculo de la derivada de la matriz de rigidez se realiza mediante diferencias finitas. En el contexto del análisis de sensibilidades, este planteamiento se puede clasificar como un método *discreto semianalítico* (ver p.ej. [21]) y como tal goza de las ventajas del mismo (simplicidad y facilidad de implementación). Su gran inconveniente radica en que implica la toma de un incremento virtual de grieta Δa arbitrario, equivalente a la perturbación inherente al método de diferencias finitas. Ello introduce inexorablemente un error adicional al propio de la discretización.

Sin embargo es posible calcular la derivada analíticamente a partir de la discretización de EF a través de lo que se ha dado en llamar método *discreto analítico* en el cálculo de sensibilidades. Aquí se propone calcular G a partir de dicho enfoque, evitando así el error debido a la aproximación de diferencias finitas. El cálculo de la derivada de \mathbf{K} respecto a la variable de diseño a es un cálculo habitual en numerosos problemas de diseño de forma en EF. En [22] esta derivada se formula para la matriz de rigidez \mathbf{K}^e de un elemento isoparamétrico como sigue:

$$\frac{d\mathbf{K}^e}{da} = \int_{\Omega^e} \left[\frac{d\mathbf{B}^T}{da} \mathbf{D} \mathbf{B} | \mathbf{J} | + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{d\mathbf{B}}{da} | \mathbf{J} | + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{d| \mathbf{J} |}{da} \right] d\Omega^e \quad (2)$$

donde Ω^e es el dominio local del elemento de referencia, \mathbf{B} es la matriz que relaciona los desplazamientos nodales de un elemento con el campo de deformaciones del mismo, \mathbf{D} es la matriz de comportamiento del material que relaciona deformaciones con tensiones y \mathbf{J}

es la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas. Se supone un material continuo y homogéneo, cuya matriz \mathbf{D} no cambia con a . Como se observa, para evaluar (2) es necesario conocer la sensibilidad de \mathbf{B} y del jacobiano $|\mathbf{J}|$ [22]. A su vez, para su cálculo se necesitan las derivadas de las coordenadas espaciales (globales) de los nodos del elemento, dx_n/da , dy_n/da , y que constituyen el llamado *campo de velocidades* \mathbf{v} .

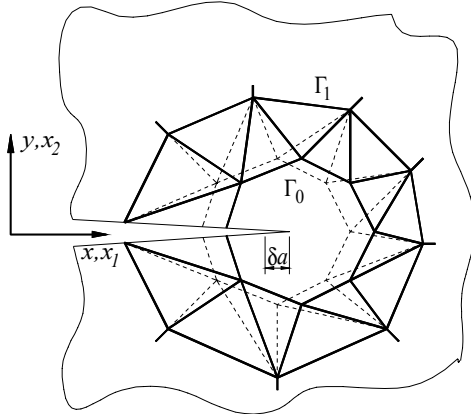


Fig. 1. Extensión virtual δa de los puntos encerrados por Γ_0 , y que a su vez induce una extensión virtual δx variable punto a punto entre Γ_0 y Γ_1 (campo de velocidades).

Las componentes del campo de velocidades en un nodo n en un problema 2D son:

$$(v_x)_n = \frac{dx_n}{da} \quad (v_y)_n = \frac{dy_n}{da} \quad (3)$$

El campo de velocidades queda definido en el interior del elemento a partir de los valores nodales mediante interpolación con las funciones de forma, resultando así un campo continuo. Físicamente está relacionado con la extensión virtual de grieta propia del método de la derivada de la rigidez y define cómo varía la posición de las coordenadas nodales de todo el dominio cuando la grieta se extiende una cantidad δa (ver figura 1). En el caso habitual de una grieta definida en dirección x y asumiendo que se propaga de forma similar (en la misma dirección x) se cumple que $(v_y)_n = 0 \forall n$. El campo de velocidades debe ser necesariamente continuo, tomar valores entre 0 y 1 y estar sometido a las restricciones $|\mathbf{v}|=1$ en el extremo de grieta y $\mathbf{v}=0$ en todos los puntos del contorno del problema (excepto en las caras de grieta). Estas restricciones tienen un sentido físico obvio si se quiere respetar el concepto de *cambio de forma* debido exclusivamente al crecimiento virtual de grieta. Por lo demás, la elección de la forma concreta de \mathbf{v} es arbitraria y debe ser definida por el usuario, dando lugar a resultados teóricamente idénticos para todo \mathbf{v} . Sin embargo, cuando se implementa mediante EF los resultados varían según el campo de velocidades tomado debido al propio error de discretización del

MEF, como se comprueba en los ejemplos numéricos de este trabajo.

De acuerdo con este enfoque es posible escribir el método de la derivada de rigidez como:

$$G = -\frac{d\Pi}{da} = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{u}^e \mathbf{T} \frac{d\mathbf{K}^e}{da} \mathbf{u}^e \quad (4)$$

donde $d\mathbf{K}^e/da$ viene dada por (2) y donde \mathbf{u}^e representa el vector de desplazamientos nodales asociados al elemento e , siendo N_e el número total de elementos de la discretización. En realidad el sumatorio sólo necesita ser extendido a aquellos elementos para los que el campo de velocidades varía en su interior (debido lógicamente a valores nodales de \mathbf{v} distintos), ya que en aquellos elementos para los que todos sus nodos experimentan la misma extensión virtual se cumple que $d\mathbf{K}^e/da = 0$. En definitiva el procedimiento que se aplicará en este trabajo responde a la expresión siguiente:

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^e \mathbf{T} \frac{d\mathbf{B}^T}{da} \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}^e |\mathbf{J}| d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^e \mathbf{T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{d\mathbf{B}}{da} \mathbf{u}^e |\mathbf{J}| d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^e \mathbf{T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}^e \frac{d|\mathbf{J}|}{da} d\Omega^e \right\} \quad (5)$$

3. EQUIVALENCIA DEL MÉTODO DISCRETO ANALÍTICO DE LA DERIVADA DE RIGIDEZ Y EL MÉTODO EDI

Una característica interesante del procedimiento propuesto en el apartado anterior es que ofrece exactamente la misma precisión que J cuando ésta se evalúa numéricamente mediante el método de la integral de dominio EDI para un campo de velocidades dado. Esta afirmación se justifica en base a la equivalencia del método EDI (interpretable como un enfoque continuo de sensibilidades) una vez discretizado para su implementación en EF y el método discreto analítico antes expuesto. El método EDI [4,6-8,19,20] calcula J a través de la expresión

$$J = \int_{\Omega^*} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{li} \right) \frac{\partial q_l}{\partial x_i} d\Omega \quad (6)$$

con $i, j = 1, 2$ y donde σ_{ij} y u_j son los campos de tensiones y desplazamientos, W es la energía de deformación por unidad de volumen, δ_{ij} es la delta de

Kronecker y Ω^* es una porción del dominio del problema que rodea completamente el extremo de grieta (como la región anular señalada con elementos triangulares en la figura 1). La función q_1 es una función suficientemente continua que debe tomar valores entre 0 y 1 y corresponde exactamente a la componente v_x del campo de velocidades descrita en el apartado anterior ($q_1 \equiv v_x$). Al igual que (1), la ec. (6) es únicamente válida en ausencia de fuerzas másicas y fuerzas superficiales aplicadas sobre las caras de grieta y cuando se asume que la grieta avanza en dirección $x_1 \equiv x$.

A continuación se demuestra la equivalencia entre el método EDI y el método discreto analítico aplicado a la derivada de rigidez. Parks [2] ya demostró la equivalencia del método de la derivada de rigidez y la integral de contorno J cuando ésta se implementa bajo ciertas condiciones mediante elementos triangulares lineales bidimensionales. En [23] se señala la equivalencia entre el método de la derivada de rigidez y el método EDI cuando se describen analíticamente en términos de elementos finitos para determinados tipos de elementos usuales en la práctica. A continuación se demuestra la equivalencia entre ambos planteamientos desde un punto de vista más general, basado en el enfoque en sensibilidades.

Resulta obvio que las dos primeras integrales de (5) corresponden al mismo escalar debido a la simetría de la matriz \mathbf{D} . Sustituyendo en (5) las relaciones propias del MEF, $\mathbf{e}_{ef} = \mathbf{B}\mathbf{u}^e$, $\mathbf{\sigma}_{ef} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}^e$, donde se utiliza el subíndice ($)_{ef}$ para distinguir los campos derivados de la solución de EF de los campos analíticos, resulta

$$G = - \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Omega^e} \mathbf{\sigma}_{ef}^T \frac{d\mathbf{B}}{da} \mathbf{u}^e |\mathbf{J}| d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \frac{1}{2} \mathbf{\sigma}_{ef}^T \mathbf{e}_{ef} \frac{d|\mathbf{J}|}{da} d\Omega^e \right\} \quad (7)$$

En [22] se demuestra que la sensibilidad de $|\mathbf{J}|$ se puede expresar en función de las componentes del campo de velocidades $\mathbf{v} \equiv \mathbf{q}$ (denominado a partir de ahora simplemente \mathbf{q}) para el caso más general 3D como:

$$\frac{d|\mathbf{J}|}{da} = \text{traza} \left(\sum_{n=1}^{N_{ne}} \left\{ \begin{matrix} N_{n,x} \\ N_{n,y} \\ N_{n,z} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} (q_x)_n & (q_y)_n & (q_z)_n \end{matrix} \right\} |\mathbf{J}| \right) \quad (8)$$

donde n indica el número de nodo del elemento (de un total de N_{ne} nodos por elemento) y $N_{n,x}$, etc. son las derivadas parciales de la función de forma asociada al nodo n con respecto a las coordenadas globales. En (8) se ha supuesto que al implementar el método mediante elementos finitos la función continua \mathbf{q} se describe como una interpolación a partir de valores nodales \mathbf{q}_n a través de las funciones de forma N_n . Si como es habitual el campo de velocidades \mathbf{q} se escoge de forma que sólo

tenga componente no nula en la dirección normal al frente de grieta contenida en el plano de grieta, p.ej. la dirección x en la figura 1, $q_x \neq 0$, se tendrá

$$\frac{d|\mathbf{J}|}{da} = \sum_{n=1}^{N_{ne}} N_{n,x} (q_x)_n |\mathbf{J}| = \frac{\partial q_{xef}}{\partial x} |\mathbf{J}| \quad (9)$$

indicando con q_{xef} que la componente q_x se describe como una interpolación a partir de los valores nodales. Es importante señalar que el plano y dirección de propagación de grieta pueden no coincidir con el sistema global utilizado en el análisis de EF. En tal caso, los campos de EF que aparecen en (7) deben ser expresados con arreglo a un sistema local en el que x sea la dirección normal al frente de grieta contenido en el plano de grieta. Resulta entonces

$$G = - \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Omega^e} \mathbf{\sigma}_{ef}^T \frac{d\mathbf{B}}{da} \mathbf{u}^e |\mathbf{J}| d\Omega^e + \int_{\Omega^e} W_{ef} \frac{\partial q_{xef}}{\partial x} |\mathbf{J}| d\Omega^e \right\} \quad (10)$$

Mediante desarrollos análogos se puede obtener una expresión para la sensibilidad de la matriz \mathbf{B} , que postmultiplicada por el vector de desplazamientos nodales del elemento \mathbf{u}^e da lugar al vector siguiente:

$$\frac{d\mathbf{B}}{da} \mathbf{u}^e = - \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial q_{xef}}{\partial x} \frac{\partial u_{ef}}{\partial x} \\ \frac{\partial q_{xef}}{\partial y} \frac{\partial u_{ef}}{\partial x} \\ \frac{\partial q_{xef}}{\partial z} \frac{\partial u_{ef}}{\partial x} \\ \frac{\partial q_{xef}}{\partial x} \frac{\partial u_{ef}}{\partial y} + \frac{\partial q_{xef}}{\partial x} \frac{\partial v_{ef}}{\partial x} \\ \frac{\partial q_{xef}}{\partial y} \frac{\partial v_{ef}}{\partial x} + \frac{\partial q_{xef}}{\partial y} \frac{\partial w_{ef}}{\partial x} \\ \frac{\partial q_{xef}}{\partial z} \frac{\partial w_{ef}}{\partial x} + \frac{\partial q_{xef}}{\partial z} \frac{\partial u_{ef}}{\partial x} \end{matrix} \right\} \quad (11)$$

indicando con u_{ef} , v_{ef} , y w_{ef} las componentes del campo de desplazamientos en el elemento interpoladas a partir de los valores nodales. Premultiplicando por el vector $\mathbf{\sigma}_{ef}^T$ resulta un escalar que, utilizando por conveniencia notación indicial, se puede expresar como

$$\mathbf{\sigma}_{ef}^T \frac{d\mathbf{B}}{da} \mathbf{u}^e = - \left(\sigma_{ijef} \frac{\partial u_{jef}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q_{1ef}}{\partial x_i} \quad (12)$$

Con esta notación, (10) toma exactamente la forma del método EDI cuando se implementa mediante EF:

$$G = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \left[\left(\sigma_{ijef} \frac{\partial u_{jef}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q_{1ef}}{\partial x_i} - W_{ef} \frac{\partial q_{1ef}}{\partial x_1} \right] |\mathbf{J}| d\Omega^e \quad (13)$$

4. EL MÉTODO DISCRETO ANALÍTICO DE LA DERIVADA DE RIGIDEZ Y SU APLICACIÓN EN MODOS MIXTOS 2D

Ishikawa *et al.* [11] resolvieron el problema de la separación de modos I y II en un análisis 2D mediante la técnica de descomposición de campos. Consiste en la separación de los campos de desplazamientos y tensiones en su parte simétrica y antisimétrica, supuesto comportamiento elástico lineal. Si se toman dos puntos $P(x_1, x_2)$ y $P'(x_1, -x_2)$ de coordenadas simétricas respecto al plano de grieta (eje x_1 en la figura 1) y si se define el campo de desplazamientos y de tensiones en el punto P' como

$$\begin{aligned} u_i'(x_1, x_2) &= u_i(x_1, -x_2) \\ \sigma_{ij}'(x_1, x_2) &= \sigma_{ij}(x_1, -x_2) \end{aligned} \quad (14)$$

entonces los campos u_i y σ_{ij} en el punto P se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^I + \mathbf{u}^{II} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{Bmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^I + \boldsymbol{\sigma}^{II} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} + \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} - \sigma_{12}' \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} + \sigma_{12}' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Una expresión análoga puede plantearse para $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^I + \boldsymbol{\varepsilon}^{II}$. Sustituyendo los campos u_i , σ_{ij} , ε_{ij} que aparecen en el método EDI dado por (6) por sus correspondientes descomposiciones $u_i^I + u_i^{II}$, $\sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II}$, $\varepsilon_{ij}^I + \varepsilon_{ij}^{II}$ se puede demostrar que se cumple [11-13]

$$J_I + J_{II} = J \quad (16)$$

estando J_I , J_{II} calculadas independientemente a través de (6) con las componentes asociadas al modo I y II respectivamente. De esta forma se dispone por separado de las tasas de liberación de energía J_I , J_{II} correspondientes. Aunque este planteamiento da en general buenos resultados [19,20], en este trabajo se propone una mejora haciendo uso de (5). Como se observa, el único campo solución de EF que aparece explícitamente en (5) es el campo de desplazamientos y por tanto en su aplicación a modos mixtos sólo es necesaria la descomposición de campos de \mathbf{u}^e a través de la primera de las ecuaciones en (15). Así las tasas de liberación de energía para los modos I, II se calculan como:

$$G_I = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{u}^{I,eT} \frac{d\mathbf{K}^e}{da} \mathbf{u}^{I,e} \quad (17)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{u}^{II,eT} \frac{d\mathbf{K}^e}{da} \mathbf{u}^{II,e} \quad (18)$$

estando $d\mathbf{K}^e/da$ calculada por (2). Los correspondientes FIT vendrán dados por:

$$K_I = \sqrt{E' G_I} \quad K_{II} = \sqrt{E' G_{II}} \quad (19)$$

siendo $E'=E$ en tensión plana y $E'=E/(1-\nu^2)$ en deformación plana. En el apartado 3 se ha demostrado que los métodos dados por (5) y (6) son numéricamente equivalentes cuando se aplican a la solución de EF sin descomposición alguna. Sin embargo, en su aplicación a modos mixtos, (5) necesita únicamente la descomposición de \mathbf{u} mientras que (6) de la descomposición de \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$. Cuando estos procedimientos se aplican mediante EF es de esperar que conduzcan a resultados numéricos ligeramente diferentes según la forma en que se realiza la discretización. Los resultados asociados al método propuesto aquí son teóricamente mejores, ya que todos los cálculos se realizan *de forma consistente* según una única descomposición de la solución \mathbf{u} de EF.

Conviene señalar que la técnica de descomposición de campos presenta un inconveniente en aquellos análisis en los que el plano de grieta no es un plano de simetría del dominio de definición del problema [12]. En estos casos, la zona en la que esta técnica es aplicable está restringida (ver figura 2).

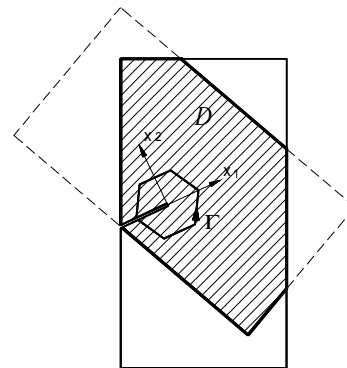


Fig. 2. Dominio D en el que es posible definir un área encerrada por Γ para la técnica de descomposición de campos.

En [12,13] se señala que es conveniente la utilización de una malla de EF simétrica respecto al plano de grieta (es decir, coordenadas nodales simétricas). Sin embargo, la utilización cada vez más frecuente de procedimientos de mallado automático y de adaptación de malla obliga a implementar el método mediante mallas no simétricas, en especial en geometrías complejas. Éste es el caso de los ejemplos numéricos que siguen, ya que se ha hecho uso de un proceso de refinamiento h -adaptativo.

5. VERIFICACIÓN NUMÉRICA

En la figura 3 se esquematizan los dos ejemplos numéricos analizados. Uno de ellos presenta la posibilidad de aplicar la técnica de descomposición de campos en todo su dominio debido a la simetría geométrica. En el otro, esta zona es reducida debido a la inclinación de la grieta.

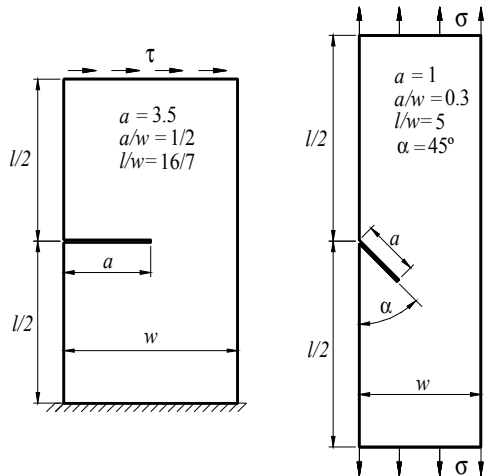


Fig. 3. Ejemplos numéricos analizados. Izda, ejemplo 1 [24]; derecha, ejemplo 2 [25].

Ambos problemas se analizaron en deformación plana con $E=10^7$. En el Ej.1 se tomó $\tau=1$, $\nu=0.25$ y en el Ej.2 $\sigma=100$, $\nu=0.333$. En [24,25] se da una solución numérica a estos problemas obtenida mediante colocación por puntos en contorno que será tomada como referencia: para el Ej.1 $K_I=34.0$, $K_{II}=4.55$; para el Ej.2 $K_I=158$, $K_{II}=78.2$. Los ejemplos fueron discretizados mediante un proceso h -adaptativo de 6 mallas (ver figura 4). Se utilizaron elementos triangulares, tanto lineales como cuadráticos, aunque aquí se presentan únicamente los resultados obtenidos con elementos lineales para el Ej. 1 y los obtenidos con elementos cuadráticos para el Ej. 2.

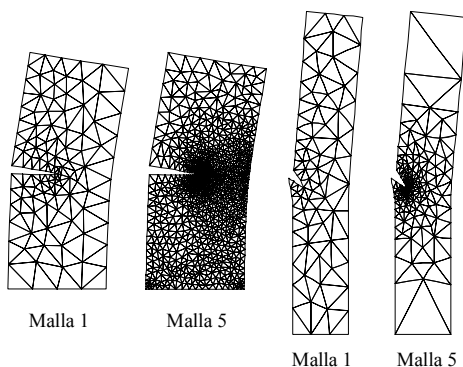


Fig. 4. Mallas h -adaptadas (deformadas) para el Ej. 1 (elem. lineales) y para el Ej. 2 (elem. cuadráticos).

Para cada uno de los dos ejemplos se efectuaron análisis tomando varios campos de velocidades diferentes. Los dos campos de velocidades que mejores resultados proporcionan para cada ejemplo se muestran en las

figuras 5 y 6, denominados aquí *campo de velocidades piramidal* y *cónico*. Las figuras muestran el módulo de dichos campos de velocidades, variable entre 0 y 1.

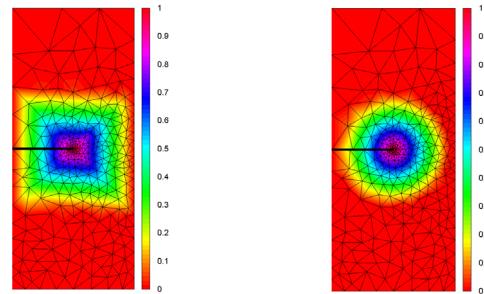


Fig. 5. Módulo de los campos de velocidades utilizados en el Ej.1: tipo piramidal (izda.) y tipo cónico (dcha).

Notar que la región sobre la que se extienden está más bien limitada a las cercanías de la grieta, y su variación es lineal hacia la zona donde $q=0$. En el Ej.2 (ver figura 6) la extensión del campo está además restringida por el efecto mostrado en la figura 2, debido a la inclinación de la grieta. Campos de velocidades de tipo anular o meseta o que hagan intervenir pocos elementos en el entorno de grieta no ofrecieron buenos resultados. Otra característica importante para la aplicación del método propuesto es que los campos se extiendan tanto como sea posible a lo largo de las caras de grieta, ya que se trata de una zona con poca rigidez, donde los desplazamientos son apreciables y donde la técnica de descomposición de campos funciona eficientemente.

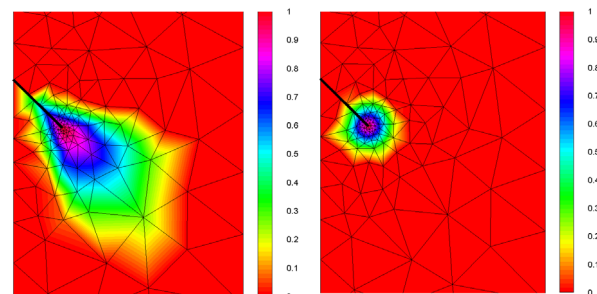


Fig. 6. Módulo de los campos de velocidades utilizados en el Ej.2 (zoom): tipo piramidal (izda.) y tipo cónico (dcha).

La figura 7 muestra los resultados obtenidos para el Ej.1 discretizado mediante elementos lineales con los dos campos de velocidades de la figura 5. Los resultados en forma de error relativo (%) respecto a la solución de referencia se muestran para cada modo, permitiendo la comparación entre la aplicación de (6) con descomposición de campos, cuyos resultados son denotados por J_I , J_{II} , y los obtenidos mediante el método propuesto a través de (17), (18), denotados por G_I , G_{II} . En general se aprecia una mejora en los resultados proporcionados por el método propuesto. Notar la deficiente estimación de los valores para el modo II con mallas bastas debido a que este modo es relativamente

poco importante en este ejemplo ($K_{II}=4.55$ frente a $K_I=34.0$).

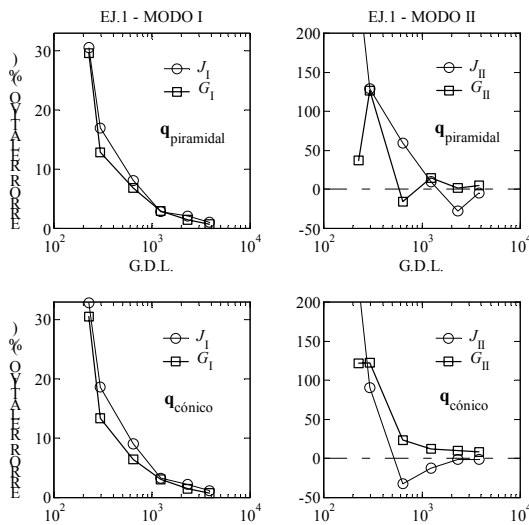


Fig. 7. Ej.1 (el. lineales): resultados con campo de velocidades piramidal (arriba) y cónico (bajo).

La figura 8 muestra los resultados obtenidos para el Ej.2 con elementos cuadráticos, dando lugar como es lógico, a una mejor estimación porcentual de la solución. Se aprecia que la solución proporcionada en este trabajo tiende a ser más suave y se estabiliza asintóticamente. Notar que la convergencia tiende a un valor cercano al 2% por encima de la solución de referencia para el modo I y por debajo para el modo II, lo que hace suponer que el propio análisis de EF es más preciso que la solución tomada como referencia en este ejemplo. En general, se puede concluir que la solución proporcionada por el método propuesto tiende a ser más estable y acercarse a la solución de referencia con un menor número de saltos.

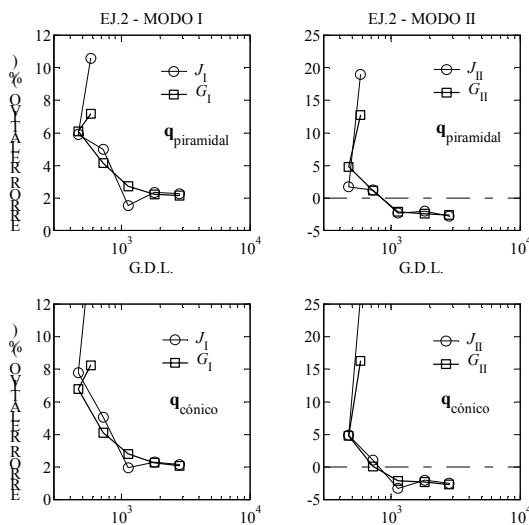


Fig. 8. Ej.2 (el. cuadráticos): resultados con campo de velocidades piramidal (arriba) y cónico (bajo).

Conviene señalar que debido a que el error más importante en el análisis por EF deriva del error de discretización (especialmente en el caso de mallas bastas), las mejoras en los resultados numéricos no pueden ser porcentualmente elevadas, ya que ambos procedimientos son aplicados a la misma malla del problema con el mismo error de discretización inducido. Incluso así, los resultados obtenidos con el método presentado muestran una mayor eficiencia y un mejor comportamiento para la estimación de G_I , G_{II} .

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto una mejora en la aplicación del método de la derivada de rigidez a través del análisis de sensibilidades por EF que hace innecesaria la aproximación por diferencias finitas. Se ha demostrado que este enfoque es numéricamente equivalente a la evaluación de J mediante el método EDI para problemas de la MFEL siempre que se tome un mismo campo de velocidades. Además, mediante ejemplos numéricos, se ha verificado que cuando ambos planteamientos se aplican a problemas en modo mixto mediante la técnica de descomposición de campos, el método aquí presentado ofrece mejores resultados y proporciona una solución más estable en un proceso h -adaptativo. Numéricamente este procedimiento tiene la ventaja de ser consistente con la descomposición de desplazamientos de un análisis por EF. Los ejemplos se han resuelto con distintos campos de velocidades y se han incluido las características que éstos deben cumplir para que den lugar a buenas estimaciones numéricas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer a la CICyT, que ha financiado este trabajo como parte del proyecto de investigación PB97-0696-C02-02.

REFERENCIAS

- [1] Banks-Sills, L., "Application of the finite element method to linear elastic fracture mechanics", Appl Mech Rev **44**(10) (1991).
- [2] Parks, D.M., "A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors", Int J Fracture **10**, 487-502 (1974).
- [3] Hellen, T.K., "On the method of virtual crack extensions", Int J Numer Methods Eng **9**, 187-207 (1975).

- [4] Li, F.Z., Shih, C.F. y Needleman, A., "A comparison of methods for calculating energy release rates", Eng Fract Mech **21**(2), 405-421 (1985).
- [5] Rice, J.R., "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", J Appl Mech **35**, 379-386 (1968).
- [6] deLorenzi, H.G., "On the energy release rate and the J -integral for 3-D crack configurations", Int J Fracture **19**, 183-193 (1982).
- [7] deLorenzi, H.G., "Energy release rate calculations by the finite element method", Eng Fract Mech **21**(1), 129-143 (1985).
- [8] Shih, C.F., Moran, B. y Nakamura, T., "Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body", Int J Fracture **30**, 79-102 (1986).
- [9] Rybicki, E.F y Kanninen, M.F. "A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral", Eng Fract Mech **9**, 931-938 (1977).
- [10] Shivakumar, K.N., Tan, P.W. y Newman, J.C. Jr., "A virtual crack closure technique for calculating stress intensity factors for cracked three dimensional bodies", Int J Fracture **36**, R43-R50 (1988).
- [11] Ishikawa, H., Kitagawa, H. y Okamura, H. " J -integral of a mixed mode crack and its applications", ICM 3 **3**, 447-455 (1979).
- [12] Bui, H.D. "Associated path independent J -integrals for separating mixed modes", J Mech Phys Solids **31**, 439-448 (1983).
- [13] Bui, H.D. y Proix, J.M. "Numerical analysis of stress intensity factors in mixed mode problems by path independent integrals J_I and J_{II} ", Numerical Methods in Fracture Mechanics, (Ed. Owen, D.R.J. y Luxmoore, A.R.) Proceedings 3rd Conference, 139-148, Pineridge Press, Swansea (1984).
- [14] Budiansky, B. y Rice, J.R., "Conservation laws and energy-release rates", J Appl Mech **40**, 201-203 (1973).
- [15] Cherepanov, G.P. "Mechanics of brittle fracture", McGraw-Hill, Nueva York (1979).
- [16] Nishioka, T. y Atluri, S.N. "On the computation of mixed-mode K -factors for a dynamically propagating crack, using path-independent integrals J_k ", Eng Fract Mech **20**(2), 193-208 (1984).
- [17] Eischen, J.W. "An improved method for computing the J_2 integral", Eng Fract Mech, **26**(5), 691-700 (1987).
- [18] Chen, F.H.K. y Shield, R.T. "Conservation laws in elasticity of the J -integral type" J Appl Math Physics **28**, 1-22 (1977).
- [19] Nikishkov, G.P. y Atluri, S.N. "Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack", Int J Numer Methods Eng **24**, 1801-1821, (1987).
- [20] Shivakumar, K.N. y Raju, I.S. "An equivalent domain integral method for three-dimensional mixed-mode fracture problems", Eng Fract Mech **42**(6), 935-959, (1992).
- [21] Barthelemy, B. y Haftka, R.T. "Accuracy analysis of the semi-analytical method for shape sensitivity calculation", Mech Struct Mach **18**(3), 407-432, (1990).
- [22] El-Sayed, M.E.M. y Zumwalt, K.W. "Efficient design sensitivity derivatives for multi-load case structures as an integrated part of finite element analysis", Comput Struct **40**, 1461-1467, (1991).
- [23] Banks-Sills, L. y Sherman, D., "On the computation of stress intensity factors for three-dimensional geometries by means of the stiffness derivative and J -integral methods", Int J Fracture **53**, 1-20 (1992).
- [24] Stern, M., Becker, E.B. y Dunham, R.S., "A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors", Int J Fracture **12**(3), 359-368 (1976).
- [25] Wilson, W.K., "Combined mode fracture mechanics", Ph.D. Dissertation, Univ. Pittsburgh (1969) en ANSYS Fracture Mechanics Tutorial v. 4.4 (1989).