

MEDICIÓN IN SITU DE PROPIEDADES MECÁNICAS MEDIANTE MICRO-INDENTACIÓN INSTRUMENTALIZADA

M. Mata, M. Anglada y J. Alcalá

Universidad Politécnica de Catalunya
Departamento de Ciencia de Materiales e Ing. Metalúrgica
E.T.S.Ingenieros Industriales de Barcelona. Avda Diagonal 647, 08028 Barcelona

Resumen. En el presente trabajo se utilizan técnicas de microindentación instrumentalizada para la evaluación del comportamiento elastoplástico de materiales. La coincidencia entre las modelizaciones por elementos finitos de la mecánica del contacto de indentadores cónicos y las observaciones experimentales de indentación Vickers permiten establecer una metodología para la evaluación del módulo de Young, dureza y coeficiente de endurecimiento a partir de las curvas de carga aplicada (P)—profundidad de penetración (h) medidas mediante indentación instrumentalizada. Se presta especial énfasis al estudio de los fenómenos de apilamiento y hundimiento alrededor del área de contacto, y a establecer su correlación con el coeficiente de endurecimiento del material indentado. Los resultados de esta investigación permiten la evaluación directa del área de contacto a partir de las mediciones de profundidad de penetración. Este es un aspecto clave en la automatización de metodologías de indentación instrumentalizada.

Abstract. This paper deals with the application of instrumented indentation techniques in the assessment of the elastoplastic mechanical behavior of materials. The agreement between finite element modeling of conical indentation and experimental measurements of Vickers indentation enables us to propose a methodology for the evaluation of Young's modulus, hardness, and hardening coefficient from the applied load (P)—depth of penetration (h) curves measured by recourse to instrumented indentation. Special emphasis is placed upon the study of pile-up and sinking-in around the contact periphery in order to quantify the influence of plastic hardening on such surface deformation modes. The results enable a direct evaluation of contact area from measurements of depth of penetration which is a key factor in the automatization of instrumented indentation methodologies.

1. INTRODUCCIÓN

Las técnicas de indentación instrumentalizada permiten la medición *in situ* de las curvas de carga (P)—profundidad de penetración (h) de un indentador en una muestra de material cuyo comportamiento mecánico se desea evaluar. Estas curvas suministran una caracterización elastoplástica del material indentado, de cuyo análisis es potencialmente posible la evaluación de propiedades mecánicas fundamentales como el coeficiente de endurecimiento, módulo de Young, dureza y límite elástico.

Dependiendo del área de contacto inducida entre el indentador y la muestra de material, los ensayos de indentación se sitúan en los rangos de nano-, micro- o

macro-indentación. De esta forma, los ensayos de nano-indentación, realizados usando una carga menor a 1 N, permiten la caracterización microestructural de materiales y capas delgadas [1—3]. Al aumentar gradualmente la carga aplicada en el rango de microindentación (1—500 N), el comportamiento a contacto se hace representativo del continuo ya que la región de contacto puede ocupar un número suficiente de fases o granos.

En vista de lo anterior, es evidente que una variable fundamental de los ensayos de indentación instrumentalizada es el área de contacto para cualquier carga aplicada, P . La necesidad de evaluar esta superficie resulta evidente si se tienen en cuenta las metodologías expuestas en [4, 5] para el análisis de las

curvas $P-h$. Estos trabajos proponen estrategias a seguir en la evaluación de propiedades mecánicas fundamentales, siendo el valor del área de contacto un aspecto clave en todas ellas.

Un fenómeno importante que afecta a los ensayos de indentación es el desarrollo de apilamiento y hundimiento del material alrededor de la superficie de contacto. Este fenómeno se muestra de forma esquemática en la Fig. 1. De esta figura resulta evidente que si el área de contacto se evaluase a partir de las mediciones de la profundidad de penetración desde la superficie libre (h), su magnitud se sobrestimaría o subestimaría dependiendo de si se desarrollara respectivamente hundimiento o apilamiento de material. En consecuencia, un punto crítico para el análisis de los ensayos de indentación instrumentalizada es la evaluación de la deformación superficial alrededor del área de contacto para que ésta pueda tenerse en cuenta en la estimación de propiedades mecánicas.

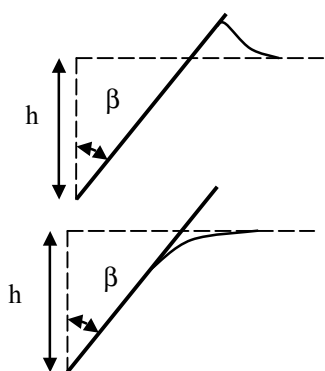


Fig. 1. Esquema del desarrollo de apilamiento (a) y hundimiento (b) y nomenclatura asociada.

En este trabajo se presentan resultados experimentales de microindentación instrumentalizada utilizando penetradores Vickers, al igual que análisis por elementos finitos de la mecánica del contacto entre indentadores puntiagudos y sólidos que se deforman de acuerdo a los modelos de plasticidad propios de metales. Los resultados experimentales y de la modelización por elementos finitos permiten un análisis detallado y consistente de los fenómenos de deformación superficial (apilamiento o hundimiento). De esta forma, es posible su evaluación y consideración en la estimación de propiedades a partir de las curvas $P-h$.

2. MATERIALES Y PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Los ensayos de microindentación instrumentalizada se realizaron utilizando un dispositivo similar al esquematizado en la Fig. 2. Este dispositivo permite la medición de la carga aplicada sobre un penetrador Vickers y la profundidad de penetración resultante sobre

la superficie indentada. El dispositivo consta de un sistema de husillos para producir el movimiento vertical del indentador en relación a la muestra, una célula de carga, y un sistema de sensores capacitivos para la medición de desplazamientos relativos. Estos sensores fueron situados minimizando la distancia entre la muestra y la punta del penetrador Vickers de forma tal que las curvas $P-h$ no tuvieran que ser corregidas a fin de considerar la flexibilidad relativa del sistema de indentación. La resolución en la medición de P y h fue de, respectivamente, 0.02 N y 5 nm, hasta una carga y penetración máximas de : 50 N y 50 μ m.

Los materiales utilizados en los ensayos de indentación fueron cobre policristalino, aceros inoxidable, y una cerámica de base circona (Y-TZP). El cobre fue recocido a fin de inducir su recritalización, obteniéndose un tamaño de grano final de 60 μ m. Una probeta cilíndrica de este material fue deformada uniaxialmente hasta una tensión muy próxima a la que causaría rotura en la probeta. El comportamiento de este cobre endurecido por deformación es, por lo tanto, similar al de un sólido elastoplástico ideal. Los aceros inoxidables ensayados corresponden a las denominaciones AISI 329, SAF 2507 y AISI 316 L, siendo los dos primeros aceros dúplex, en los que existe una mezcla de ferrita y austenita, y el tercero (AISI 316 L) un acero austenítico. El tamaño medio de los granos en los aceros dúplex es de : 10 μ m mientras que en el auténtico de : 45 μ m. La cerámica de base circona (Y-TZP) posee 2.8 %molar de itria y su tamaño de grano es de 0.5 μ m. Previamente a los ensayos de indentación, la circona fue sometida a 1100 °C por 45 minutos. Este tratamiento garantiza que el material posee una estructura totalmente tetragonal.

Todos los materiales fueron pulidos previamente a la realización de los ensayos de indentación a fin de obtener una superficie especular.

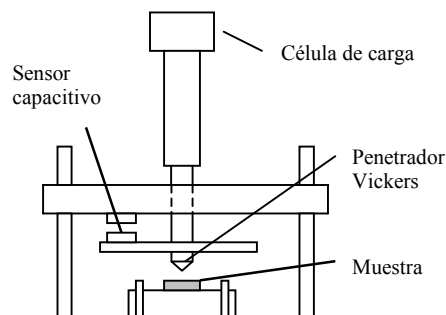


Fig. 2. Sistema de indentación instrumentalizado

3. MODELIZACIONES POR ELEMENTOS FINITOS

El modelo de plasticidad utilizado en los análisis por elementos finitos es incremental, basado en el invariante J_2 , con ley de flujo asociada a la superficie de fluencia de Von Mises. Se consideró además un comportamiento isótropo y continuo. Dicho modelo de plasticidad proporciona buenos resultados en la modelización del comportamiento plástico de materiales metálicos, donde el movimiento de dislocaciones es el principal responsable del desarrollo de deformación irreversible. Ya que convencionalmente se acepta que la relación tensión—deformación uniaxial en materiales metálicos sigue una ley de tipo potencial [6, 7], se consideró una ley de plasticidad descrita por trozos (lineal/potencial) de la siguiente manera:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ys}} = \frac{\sigma}{\sigma_{ys}}, \text{ para } \sigma \leq \sigma_{ys} \quad (1)$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ys}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{ys}} \right)^{1/n}, \text{ para } \sigma > \sigma_{ys}; \quad (2)$$

donde, ε y σ son, respectivamente, la deformación total (es decir, elástica y plástica) y la tensión aplicada, los subíndices “ys” refieren al valor de fluencia, y n es el coeficiente de endurecimiento uniaxial.

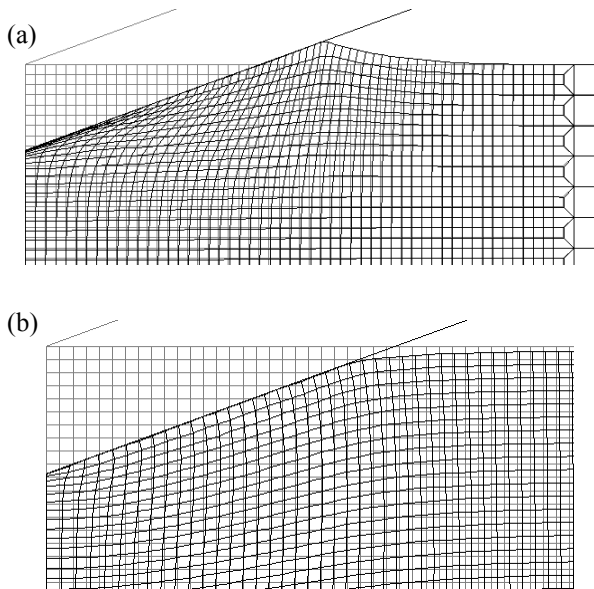


Fig. 3. Resultados de la modelización por elementos finitos. (a) Apilamiento para $n=0$ y (b) hundimiento para $n=0.4$. Nótese en (a) la transición entre la zona de malla fina alrededor del contacto y la malla gruesa circundante.

La modelización del contacto plástico se llevó a cabo asumiendo un indentador cónico (rígido) cuyo semi-ángulo en la punta es de $\beta=70^\circ$ (ver Fig. 1). Este ángulo

fue elegido ya que suministra una relación entre el área de contacto y profundidad (h) idéntica a la del penetrador Vickers. Además se asumieron condiciones de contacto sin fricción en la modelización.

El comportamiento uniaxial indicado en las ecuaciones 1 y 2 fue implementado en el software ABAQUS de elementos finitos. Se utilizó una malla de 14000 elementos en la modelización del contacto. La malla consiste de tres zonas con distintos tamaños de elemento, siendo la densidad de éstos constante en cada una de las regiones. La zona de la malla de mayor densidad de elementos es aquella que entra directamente en contacto con el indentador rígido (ver Fig. 3), en donde existen 53×53 elementos. En las zonas más finas de la maya se utilizaron elementos cuadrados con cuatro puntos de interpolación.

Aunque los nodos en contacto con el penetrador rígido sufren una deformación considerable, en ningún caso se obtuvieron inestabilidades tipo “hourglass” o elementos interpenetrados durante el análisis. La malla fue contrastada elásticamente, obteniéndose errores inferiores al 3% al comparar las modelizaciones con soluciones analíticas clásicas de la mecánica de contacto.

Un aspecto a tener en cuenta en la comparación de los resultados de la simulación con aquellos obtenidos experimentalmente, es que la modelización por elementos finitos contempla exclusivamente el caso de indentadores cónicos. Aunque esta consideración facilita el análisis ya que el contacto puede ser estudiado como si de un caso totalmente axisimétrico se tratara, es discutible que los resultados obtenidos sean equivalentes a aquellos de indentación piramidal (Vickers). Este punto será abordado en el apartado 4.

Los casos modelizados corresponden a sólidos cuyas tensiones de fluencia y coeficientes de endurecimiento son idénticos a los de los materiales metálicos estudiados (Tabla 1). Igualmente, se realizó una evaluación sistemática del apilamiento y hundimiento alrededor del contacto para sólidos con $\sigma_{ys} = 400$ MPa y valores de $n = 0, 0.1, 0.2$ y 0.4 .

Tabla 1. Propiedades mecánicas uniaxiales de los materiales

	E (GPa)	σ_{ys} (MPa)	n
Cobre (recocido)	110	20	0.52
Cobre (endurecido)	110	350	0.05
AISI 329	190	525	0.17
SAF 2507	200	675	0.19
AISI 316L	195	190	0.40
Y-TZP	208	-	-

4. INFLUENCIA DE LA DUREZA Y LA DEFORMACIÓN SUPERFICIAL EN LA CURVA $P-h$

Una implicación directa del hecho que la dureza medida con indentadores piramidales o cónicos sea constante es que

$$P = Ch^2, \quad (3)$$

donde C es constante para un material e indentador determinados. Directamente a partir de la definición de dureza, H , se tiene

$$H = P / A \quad (4)$$

donde, A es el área de contacto. Aplicando consideraciones geométricas se obtiene que

$$A = \alpha fh^2 \quad (5)$$

donde $f = 24.5$ para indentadores Vickers y α es un parámetro que evalúa el apilamiento ($\alpha > 1$) o hundimiento ($\alpha < 1$) del material.

Tal como se puede deducir a partir de la ecuación (5), $\sqrt{\alpha}$ representa simplemente a una constante que, una vez multiplicada por h , suministra el valor real de la profundidad de penetración (en el que se tiene en cuenta la deformación superficial).

La figura 4 muestra el enroscamiento alrededor del área de contacto en un acero inoxidable, cuyo valor de n es pequeño, y en el material cerámico. El hecho que la periferia del contacto en el metal sea cóncava indica que el apilamiento predomina en este material ($\alpha > 1$).

La convexidad en el cerámico es, por otra parte, indicativa del desarrollo de hundimiento ($\alpha < 1$) en la periferia del contacto (ver apartado 5).

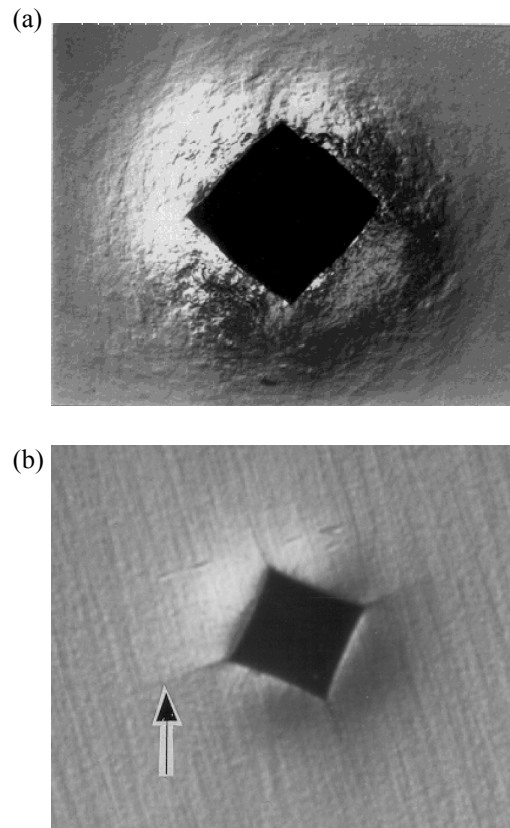


Fig. 4. Enroscamiento en las aristas de las indentaciones. (a) Apilamiento en el acero AISI 329 y (b) hundimiento en la Y-TZP. La flecha señala el desarrollo de fisuras en el material cerámico.

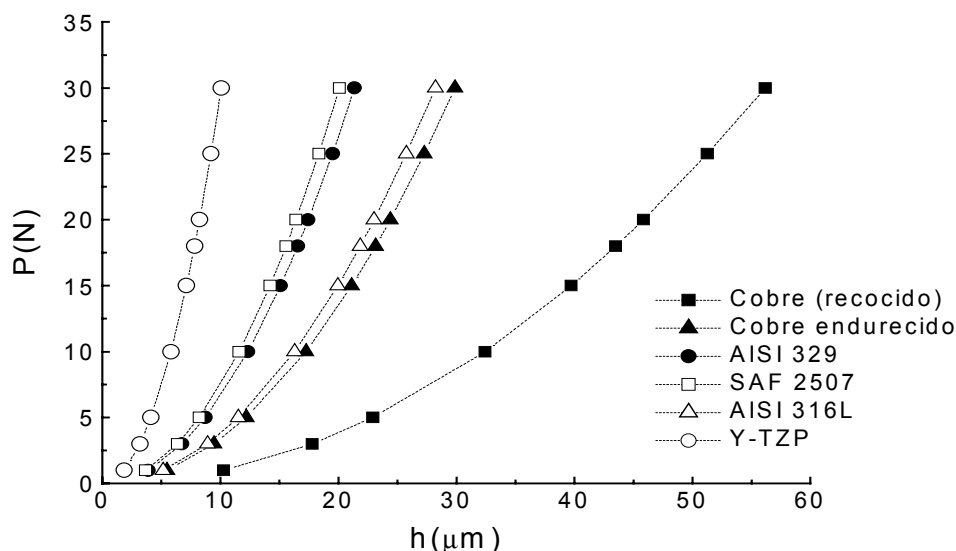


Fig. 5. Curvas de carga aplicada (P)—profundidad de penetración (h) para los materiales estudiados

A partir de las ecuaciones (4) y (5) se obtiene que

$$C = H\alpha f \quad (6)$$

Esta ecuación permite cuantificar la influencia del valor de H en la constante C . En consecuencia, a partir de la evaluación de la dureza, H , mediante microscopía óptica y el valor de C mediante indentación instrumentalizada (expresión (1)), es posible estimar el apilamiento o hundimiento en términos de α utilizando la ecuación (6). Los valores de estos parámetros se incluyen en la Tabla 2 para cada uno de los materiales mientras que en la figura 5 se muestran las curvas $P-h$.

Es importante notar que las mediciones de la deformación superficial obtenidas mediante profilometría en los materiales estudiados [5] son similares a aquellas provenientes del procedimiento de indentación instrumentalizada descrito anteriormente. Esta observación pone de manifiesto la importancia de la deformación superficial en las curvas $P-h$ y la equivalencia entre el parámetro α medido mediante indentación instrumentalizada y aquel proveniente de las evaluaciones del apilamiento o hundimiento realizadas directamente sobre la huella de indentación.

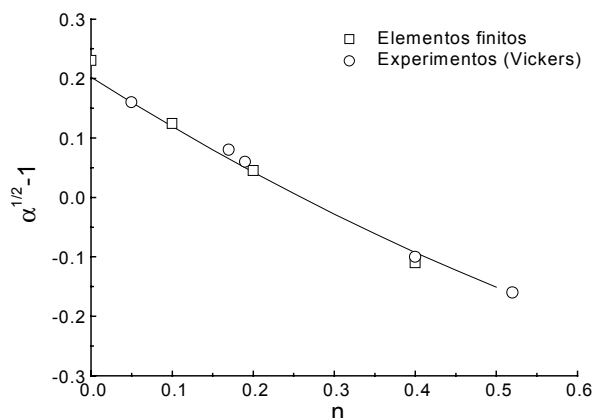


Fig. 6. Correlación entre el parámetro α y n .

Tabla 2. Resultados de indentación Vickers

	C (GPa)	$\sqrt{\alpha} - 1$	H (GPa)
Cobre (recocido)	9.5	-0.16	0.55
Cobre (endurecido)	33.6	0.16	1.02
AISI 329	65.7	0.08	2.30
SAF 2507	74.3	0.06	2.70
AISI 316L	37.7	-0.10	1.90
Y-TZP	295	-0.28	13.7

Un aspecto interesante que se desprende del estudio es que la dureza de los materiales metálicos medida experimentalmente coincide (con un 5% de error) con

aquella obtenida a partir de las modelizaciones por elementos finitos. Además, el valor de α según las modelizaciones para cada uno de los materiales metálicos estudiados es también similar al evaluado a partir de las curvas $P-h$ siguiendo el procedimiento descrito previamente. Esta comparación sugiere que las características generales del contacto plástico resultantes de la utilización de indentadores piramidales (Vickers) son similares a las de indentación cónica.

Las modelizaciones demuestran que el parámetro α es independiente de la carga aplicada o la profundidad de penetración. Su magnitud es, por lo tanto, una característica propia del material indentado para una geometría determinada de penetrador.

5. CORRELACION ENTRE LA DEFORMACIÓN SUPERFICIAL Y EL COEFICIENTE DE ENDURECIMIENTO

Las modelizaciones por elementos finitos ratifican la correlación encontrada en [5] entre el valor de α y el coeficiente de endurecimiento uniaxial, n . Esta correlación se muestra en la figura 6, evidenciándose la similitud entre las mediciones experimentales de α mediante profilometría [5] y las modelizaciones llevadas a cabo en el presente trabajo. Este aspecto sustenta los resultados expuestos en el apartado 4 en cuanto a la equivalencia entre el comportamiento a contacto de indentadores piramidales (Vickers) y el de penetradores cónicos.

La existencia de una correlación entre la deformación superficial y n fue propuesta por primera vez por Norbury y Samuel [8] a partir de resultados experimentales. Años después, los análisis de Hill et al [9] y Matthews [10] confirmaron la existencia de tal relación. Es importante indicar que, en estos estudios, la correlación entre la deformación superficial y n fue encontrada para indentación esférica mientras que para indentación Vickers este aspecto ha sido estudiado en [5]. La similitud entre esta correlación y la encontrada previamente para indentación esférica parece indicar que las características del contacto plástico en la cercanía a la superficie indentada es semejante en ambos tipos de indentadores. En consecuencia, el desarrollo de apilamiento y hundimiento parece estar controlado fundamentalmente por las condiciones de plasticidad existentes en la periferia del indentador y no en su punta, en donde los campos de tensión y deformación de ambos penetradores (puntiagudo o esférico) son diferentes.

Finalmente, es interesante resaltar que las curvas $P-h$ obtenidas en el material cerámico (Y-TZP) evidencian el desarrollo de *hundimiento* alrededor del área de contacto. Aunque el modelo de plasticidad empleado en este estudio no es válido para materiales cerámicos, cabría esperar que éstos presentaran un valor de n elevado en la medida que una vez que ocurre

deformación inelástica en un cerámico, la tensión uniaxial se incrementa considerablemente sin que apenas pueda detectarse deformación plástica a fractura. El elevado valor de n que podría asociarse a materiales cerámicos justifica que éstos desarrollen un hundimiento considerable alrededor de la superficie de contacto, ver Fig. 6. Si se asume que el comportamiento del material es elástico-lineal, el valor de α estimado debería ser aproximadamente 0.4. El hecho que el valor de α medido sea muy superior a esta magnitud ($\alpha = 0.88$), indica que las estimaciones elásticas no son apropiadas en el análisis de materiales cerámicos. Trabajos recientes muestran la correlación existente entre el comportamiento inelástico de cerámicos y la deformación superficial considerando un modelo de plasticidad apropiado para sólidos en los que el comportamiento plástico conlleva una variación de volumen [11].

6. METODOLOGÍA PARA LA EVALUACIÓN DE PROPIEDADES MEDIANTE INDENTACIÓN INSTRUMENTALIZADA

A continuación se describe la metodología propuesta por los autores para la evaluación del coeficiente de endurecimiento, n , el módulo de elasticidad de Young, E , y la dureza, H , mediante indentación instrumentalizada. Es importante indicar que esta metodología es directa en la medida que no es indispensable la medición del área de contacto ni la deformación superficial una vez realizado el ensayo de indentación.

La evaluación del valor de n puede efectuarse tal como se plantea en [4]. En consecuencia, es preciso medir la curva $P-h$ utilizando indentación esférica y considerar la siguiente relación en el análisis de los resultados

$$P \propto h^{1+(n/2)} \quad (7)$$

El valor de n puede estimarse entonces a partir de la curva $\log P - \log h$ cuya pendiente es igual a $1+(n/2)$. La ecuación (7) es consistente con la llamada "ley de Meyer" y su validez ha sido constatada experimentalmente y mediante modelizaciones por elementos finitos [4, 5, 9]. La linealidad de la curva $\log P - \log h$ garantiza que el comportamiento del material es representativo de un contacto completamente plástico y que, por consiguiente, la elasticidad subyacente no afecta a la medición del coeficiente de endurecimiento [4].

Una vez medida la curva $P-h$ mediante indentación Vickers y conocido el valor de n tal como se expone anteriormente, la figura 6 permite encontrar el valor de α del material en cuestión. La dureza se calcula entonces a partir de la ecuación (5) como

$$H = \frac{P}{24.5\alpha h^2} \quad (8)$$

para cualquier pareja de puntos en la curva $P-h$.

El valor de E se puede estimar mediante [12, 13]

$$\left(\frac{1-\nu_m^2}{E_m} + \frac{1-\nu_i^2}{E_i} \right)^{-1} = \frac{1}{1.167\sqrt{A_{\max}}} \frac{dP}{dh} \quad (9)$$

donde ν es el módulo de Poisson, A_{\max} el área de contacto a carga máxima (evaluada de acuerdo a la ecuación (5)), dP/dh la pendiente de la curva $P-h$ al inicio de la etapa de descarga, y los subíndices "i" y "m" refieren, respectivamente, al indentador y al material indentado. La expresión (9) es idéntica a aquella utilizada en ensayos de nanoindentación para estimar el módulo de elasticidad. Esta ecuación requiere de una evaluación independiente de los módulos de elasticidad y de Poisson de la pirámide Vickers empleada, al igual que el módulo de Poisson del material indentado. Convencionalmente se suele tomar $E_i : 1000 \text{ GPa}$ y $\nu_i : 0.22$.

7. SUMARIO

En este trabajo se pone de manifiesto la importancia de la deformación superficial (apilamiento o hundimiento—ver figura 1) en la evaluación de propiedades mecánicas mediante indentación instrumentalizada. Los resultados experimentales y de modelización por elementos finitos permiten establecer la relación existente entre dicha deformación (cuantificable según el parámetro α) y el coeficiente de endurecimiento por deformación, n , de materiales metálicos. En este sentido, se encuentra que los materiales metálicos sufren hundimiento en la periferia del contacto para $n > 0.2$, mientras que los valores menores de n dan lugar a un apilamiento considerable ($\alpha : 1.69$ para $n = 0$).

A partir de la correlación entre la deformación superficial, α , y n es posible proponer una metodología para la evaluación del módulo de elasticidad, E , el coeficiente de endurecimiento, n , y la dureza, H , a partir de las curvas $P-h$ medidas mediante indentación esférica y piramidal. Esta metodología permite una evaluación automatizada de propiedades ya que no es preciso llevar a cabo una medición independiente del área de contacto y la deformación superficial. El procedimiento es, por lo tanto, de utilidad en la realización de controles de calidad rutinarios de materiales y componentes.

Finalmente, las modelizaciones por elementos finitos del contacto plástico entre penetradores cónicos y una superficie plana demuestran una gran semejanza con los resultados de indentación piramidal (Vickers) obtenidos

experimentalmente. Debe resaltarse que tal similitud es solamente válida en cuanto a la deformación superficial media y dureza se refiere. Resulta evidente que, de una manera estricta, la naturaleza del contacto asociada a penetradores Vickers solo puede ser analizada considerando su carácter realmente tridimensional. En este sentido, cabe mencionar que las mediciones de apilamiento y hundimiento mediante profilometría alrededor de indentaciones Vickers [5] demuestran que la deformación superficial no es constante alrededor de la periferia del contacto. Aunque estos resultados indican que el apilamiento alrededor de las indentaciones Vickers sufre una fuerte disminución cerca de los vértices, la deformación superficial media es muy similar a aquella obtenida a partir de la modelización con indentadores cónicos.

Agradecimientos

Se agradece la ayuda prestada por A. Campillo en la preparación metalográfica de los materiales, A. Mateo y N. Salan por sus consejos en la selección de los aceros y en la realización de algunos ensayos mecánicos uniaxiales, y L. Llanes por suministrar el cobre policristalino utilizado. Este trabajo ha sido financiado por la CICYT mediante los proyectos R-PETRI 95-0381-OP y MAT96-1009.

8. REFERENCIAS

- [1] Doerner M.F. y Nix W.D., "A method for interpreting the data from depth-sensing indentation instruments," *J. Mater. Res.*, **1**, 601—609 (1986).
- [2] Mayo M.J. y Nix W.D. "A micro-indentation study of superplasticity in Pb, Sn, and Sn-38 wt% Pb" *Acta Metall.*, **36**, 2183—2192 (1988).
- [3] Oliver W.C. y Pharr G.M., "An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments," *J. Mater. Res.*, **7**, 1564—1583 (1992).
- [4] Alcalá J., Giannakopoulos A.E. y Suresh S., "Continuous measurements of load-depth of penetration curves with spherical microindenters and the estimation of mechanical properties," *J. Mater. Res.*, **13**, **5**, 1390—1400 (1998).
- [5] Alcalá J., Barone A.C. y Anglada M., "The influence of plastic hardening on surface deformation modes around Vickers and spherical indents" *Acta mater.*, **48**, 3451—3464 (2000).
- [6] Datsko J., *Materials properties and manufacturing process*, John Wiley and Sons, New York, USA, 1966.
- [7] Hill R., *The mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, 1950.
- [8] Norbury A.L. y Samuel T., "The recovery and sinking-in or piling-up of material in the Brinell test, and the effects of these factors on the correlation of the Brinell with certain other hardness tests" *J. Iron and Steel Inst.* **17**, 673 (1928)
- [9] Hill R., Storakers B. y Zdunek A.B., "A theoretical study of the Brinell hardness test" *Proc. R. Soc. London A*, **423**, 301 (1989).
- [10] Matthews, "Indentation hardness and hot pressing" *Acta Metall.* **28**, 311 (1980).
- [11] Alcalá J., "Instrumented micro-indentation of Zirconia Ceramics," *J. Am. Ceram. Soc.*, **83** [8] 1977—1984 (2000).
- [12] Sneddon I.N. "Boussinesq's problem for flat ended cylinder," *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **42**, 29—39 (1945)
- [13] King R.B., "Elastic analysis of some punch problems for a layered medium," *Int. J. Solids Struct.*, **23**, [12] 1657—1664 (1997).