

INFLUENCIA DE LA GEOMETRÍA DE LA PROBETA EN LA RELACIÓN ENTRE LA INTEGRAL J Y EL CTOD EN MATERIALES ELASTOPLÁSTICOS

G. Vadillo¹, J. Fernández-Sáez¹ y C. Betegón²

⁽¹⁾ Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Universidad Carlos III de Madrid. Avenida de la Universidad, 30. 28911 Leganés. Madrid

⁽²⁾ Departamento de Construcción y Fabricación. Universidad de Oviedo. Edificio Departamental de Viesques. Gijón. 33204.

Resumen. Los criterios de fractura que se aplican a materiales elastoplásticos están basados en la Integral J o el COD. Esta relación depende de las propiedades del material, del tipo de probeta y de la longitud de la fisura, dependencia que procede de los términos no singulares de la solución, en particular el segundo término (T-stress), que describe el campo tensional cercano al extremo de la fisura. En este trabajo se ha realizado un estudio numérico de la influencia del término no singular en la citada relación construyendo las curvas J-COD para valores constantes de T. Este análisis se ha aplicado luego a probetas de flexión en tres puntos con diferentes dimensiones y los resultados ponen de manifiesto que la geometría influye en la citada relación en aquellas situaciones en las que están presentes valores negativos del término T.

Abstract. The fracture criteria for elastic-plastic materials are based in the J integral or in the COD. The relationship between these parameters is well established for infinite geometries. However, for finite geometries the T-stress can vary the relationship. This work presents a numerical study on the influence of the T-stress on the relationship between the J integral and the COD. Curves J-COD for constant values of T are constructed and applied to three-point bend specimens of different dimensions. The results show the influence of the specimen geometry for negative values of T-stress.

1. INTRODUCCIÓN

Los criterios de fractura que se aplican a materiales elastoplásticos están basados en la integral J [1] o en el “Crack Opening Displacement” (COD) [2]. Ambos parámetros no son independientes, sino que existe una relación entre ellos que, para el caso de un sólido de dimensiones infinitas, está bien documentado en la literatura (ver, por ejemplo [3]). Dicha relación se puede utilizar, de acuerdo con las recomendaciones de algunas normas [4] para obtener el valor de J al que se produce el inicio de propagación de la fisura si se conoce la curva de resistencia a la fractura del material (curva $J-\Delta a$). La citada relación entre la integral J y el COD, depende de las propiedades del material (exponente de endurecimiento por deformación, límite elástico, módulo de elasticidad, etc), pero no se ha estudiado la posible dependencia de la geometría de la probeta incluyendo la longitud de fisura.

En el caso de plastificación a pequeña escala, la zona plástica desarrollada alrededor del extremo de una fisura que se deforma en modo I contenida en un material elastoplástico puede considerarse rodeada por un campo elástico que, para un caso bidimensional y considerando únicamente los dos primeros términos de la solución de Williams [5], viene dado por:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T \delta_{1i} \delta_{1j} \quad (1)$$

donde r y θ son las coordenadas polares centradas en el extremo de la fisura, $f_{ij}(\theta)$ son funciones conocidas, K_I es el factor de intensidad de tensiones, T es una tensión dirigida según el eje paralelo al plano de la fisura. Dicha tensión depende de las cargas exteriores y de la geometría de sólido estudiado y δ_{ij} son las δ de Kronecker. Por lo tanto, el campo tensional difiere de una geometría a otra, a pesar de que se den las condiciones para que en ambas se estén aplicando cargas que den lugar al mismo factor de intensidad de tensiones.

Utilizando formulaciones de contorno originalmente desarrolladas por Larsson y Carlson [6], Betegón y Hancock [7] han puesto de manifiesto la gran influencia que tiene el valor de la tensión T en el tamaño de la zona plástica y en el campo tensional en su interior. Más recientemente, se ha analizado también la influencia del término no singular en el campo tensional en el extremo de fisuras de sólidos sometidos a cargas dinámicas [8, 9]. Sin embargo no se han encontrado estudios similares para analizar su influencia en la relación entre la integral J y el COD.

En este trabajo se realiza un estudio sistemático de la influencia del término no singular en la citada relación y se aplica luego a probetas de flexión en tres puntos que se utilizan para la obtención de las propiedades de fractura de los materiales.

2. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

En un geometría cualquiera, dado que, tanto el factor de intensidad de tensiones, K_I , como el parámetro T , varían linealmente con las cargas exteriores, se mantiene constante el parámetro β , denominado relación de biaxialidad, que viene dado por:

$$\beta = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I} \quad (2)$$

Por tanto en una probeta de geometría y dimensiones definidas, se mantiene constante el cociente entre la tensión T y el valor de K_I dado que a es conocido.

Con objeto de desacoplar la influencia de las propiedades del material y de la geometría se ha realizado un análisis en dos etapas: primero se establecen las relaciones entre la integral J y el COD para diferentes valores de T constante, relaciones que son sólo dependientes de las propiedades del material y no de la geometría y después las curvas resultantes se intersecan con la líneas que relacionan K_I y T en una geometría concreta (definida por un cierto valor constante del parámetro β , y de una longitud característica, por ejemplo la longitud de la fisura). En los siguientes apartados se desarrollan estos análisis.

3. OBTENCIÓN DE LAS CURVAS J-COD-T

Para obtener las relaciones J-COD para diferentes valores de T constante (las curvas J-COD-T) se ha seguido una formulación de contorno y se ha analizado el comportamiento por elementos finitos, utilizando el código comercial ABAQUS [10], cuya geometría aparece en la figura 1. Dicha geometría corresponde a la zona de material que rodea el extremo de una fisura contenida en un material elastoplástico que se deforma en modo I.

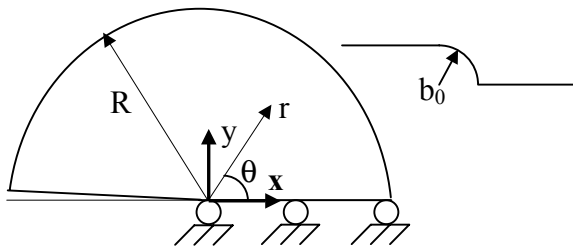


Fig. 1. Sólido analizado y detalle del fondo de la fisura.

Los valores de R y b_0 que se han usado en este estudio son $R = 5000mm$ y $b_0 = 5\mu m$

Además de la condición de simetría del plano que contiene la fisura (para $\theta = 0$ y $r > b_0$), se han impuesto, como condiciones de contorno, los desplazamientos sobre el anillo exterior de radio R dados por las ecuaciones:

$$u_x = u_{x1} + u_{x2} \quad (3)$$

$$u_y = u_{y1} + u_{y2} \quad (4)$$

donde u_{x1} y u_{y1} son los desplazamientos obtenidos a partir del primer término de la solución de Williams [5] y vienen dados por:

$$u_{x1} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{R}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[3 - 4\nu - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (5)$$

$$u_{y1} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{R}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[3 - 4\nu + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (6)$$

mientras que u_{x2} y u_{y2} son los desplazamientos correspondientes al segundo término de la solución y sus expresiones son:

$$u_{x2} = \frac{TR \cos \theta}{2\mu} [1 - \nu] \quad (7)$$

$$u_{y2} = -\frac{TR \sin \theta}{2\mu} \nu \quad (8)$$

En las anteriores expresiones μ es el módulo de elasticidad en cortadura y ν es el coeficiente de Poisson.

Se ha considerado un material elastoplástico con las siguientes propiedades:

Módulo de Elasticidad: $E = 200000MPa$

Límite elástico: $\sigma_Y = 450MPa$

Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.3$

Una vez superado el límite elástico del material, su ley tensión deformación viene dada por:

$$E\varepsilon = \alpha \sigma \left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^n \quad (9)$$

con $n = 10$ y $\alpha = 1$

En el análisis por Elementos Finitos se ha utilizado una malla (ver figuras 2 y 3) compuesta por 3500 elementos de 8 nudos (10741 nudos) con integración reducida, refinando mucho dicha malla en las zona cercana al extremo de la fisura, de tal forma que el elemento más pequeño tiene un lado de tamaño de $7,5 \cdot 10^{-8} R$.

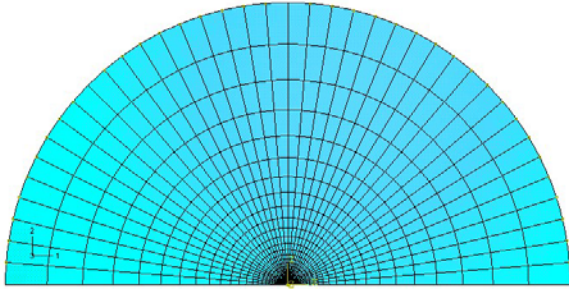


Fig. 2. Mallado de la geometría por elementos finitos.

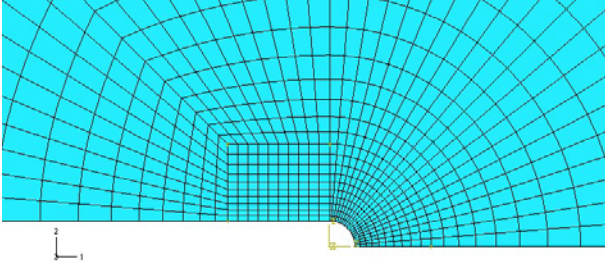


Fig. 3. Mallado del fondo de fisura

Se han realizado estudios para diferentes valores constantes de T ($-\sigma_Y \leq T \leq \sigma_Y$) y, en cada caso, el análisis se ha llevado a cabo hasta que el tamaño característico de la zona plástica ha alcanzado un valor de $R/40$.

La integral J se ha calculado a partir del valor del factor de intensidad de tensiones, K_I , mediante la relación:

$$J = \frac{K_I^2 (1 - \nu^2)}{E} \quad (10)$$

y el COD se ha calculado como:

$$COD = (b - b_0) \quad (11)$$

Para la representación de los resultados se han definido las siguientes variables adimensionales:

$$J^* = \frac{J}{\sigma_Y b_0} \quad (12)$$

$$K_I^* = \frac{K_I}{\sigma_Y \sqrt{b_0}} \quad (13)$$

$$COD^* = \frac{b - b_0}{b_0} \quad (14)$$

$$T^* = \frac{T}{\sigma_Y} \quad (15)$$

En las figuras 6 y 7 se representan, respectivamente, las curvas $K_I^* - COD^*$ y $J^* - COD^*$ para diferentes valores de T^*

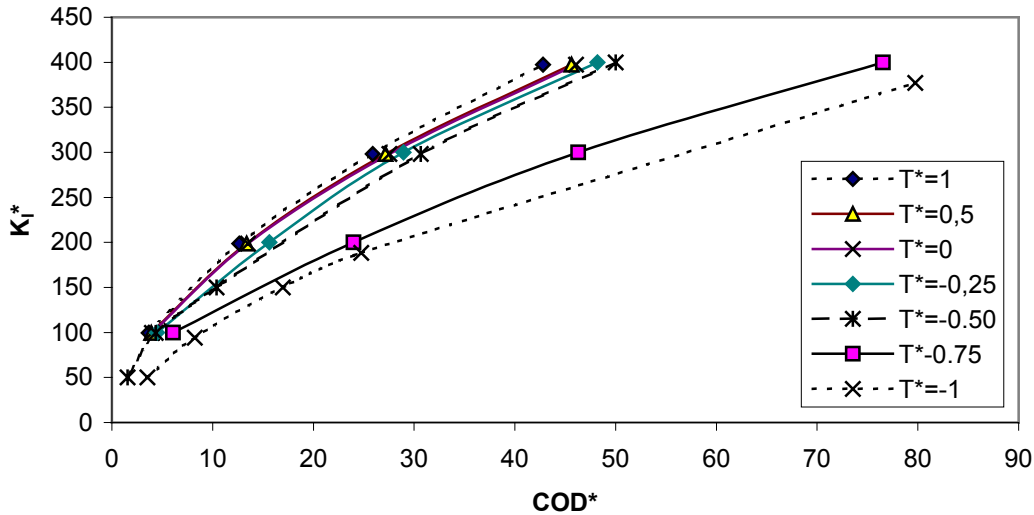


Fig. 4. Relación $K_I^* - COD^*$

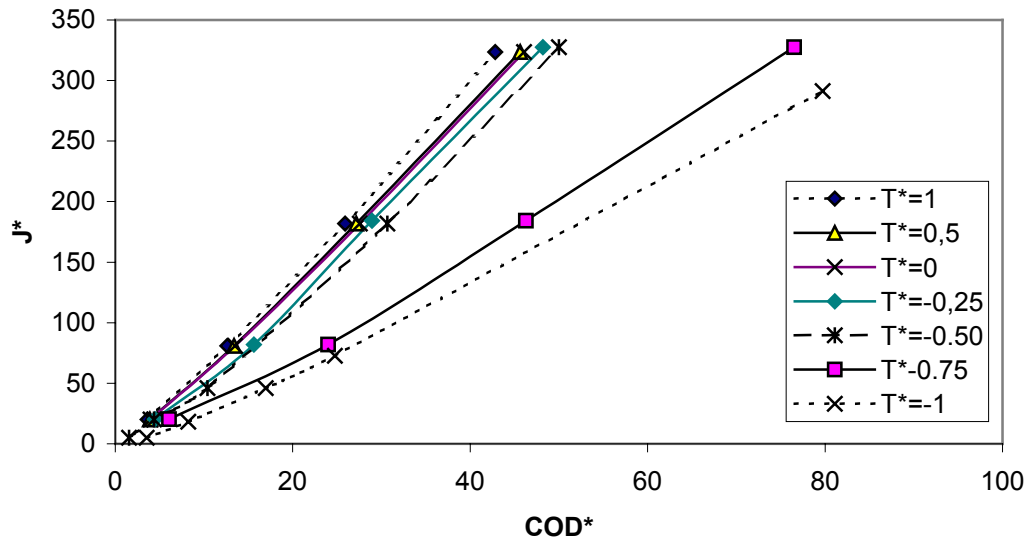


Fig. 5. Relación J* - COD*

En las curvas anteriores se observa que, para valores de T^* positivas, las relaciones entre J^* y COD^* son muy similares. Sin embargo, para valores negativos de T^* , las diferencias se hacen más notables y disminuyendo las pendientes de las citadas a medida que T^* se aproxima a -1 .

4. APLICACIÓN A PROBETAS DE FLEXIÓN EN TRES PUNTOS.

Una vez obtenidas las relaciones J-COD-T se pueden construir las relaciones J-COD para probetas con geometría y dimensiones dadas. Cada una de estas probetas está caracterizada por una relación de biaxialidad, β , fija, de tal manera que se puede establecer una relación entre el factor de intensidad de tensiones, K_I , y el valor de T mediante:

$$T^* = \sqrt{\frac{b_0}{\pi a}} \beta K_I^* \quad (16)$$

Se han analizado probetas de flexión en tres puntos con dos valores diferentes del canto, W , y tres valores de la longitud de fisura, a . Para cada una de estas probetas se han obtenido las relaciones de biaxialidad utilizando el procedimiento descrito en la referencia [11]. En la tabla 1 se muestran las características de dichas probetas, así como su correspondiente valor de β . En la figura se muestran las rectas que relacionan T^* con K_I^* para las probetas analizadas. Como se puede observar, las pendientes de las rectas son negativas para las probetas 1, 2, 3 y 4, y positivas para el resto.

Tabla 1. Dimensiones de las probetas analizadas

PROBETAS	W (mm)	a/W	β
Probeta 1	20	0.1	-0.34
Probeta 2	50	0.1	-0.34
Probeta 3	20	0.2	-0,25
Probeta 4	50	0.2	-0,25
Probeta 5	20	0.5	0,20
Probeta 6	50	0.5	0,20
Probeta 7	20	0.7	0,55
Probeta 8	50	0.7	0,55

A partir de las relaciones J^* - COD^* - T^* (dependientes únicamente de las propiedades del material) y de las relaciones entre T^* y K_I^* dependientes del tipo de probeta y de sus dimensiones, se pueden construir las relaciones entre J y COD para una probeta en concreto, siguiendo el siguiente procedimiento: para cada valor de K_I^* se obtiene el correspondiente valor de T^* y el valor de J^* calculado como:

$$J^* = \frac{\sigma_Y(1-\nu^2)}{E} K_I^* \quad (17)$$

Entrando en las curvas de la figura 5, con el valor de J^* y T^* obtenidos anteriormente, se puede obtener el valor de COD^* correspondiente.

En la figura 7 se muestran las curvas J^* - COD^* para las 8 probetas analizadas. Estas curvas son prácticamente coincidentes para las probetas números 4 a 8 y difieren para las probetas números 1 a 4. Dichas probetas presentan una relación de biaxialidad, β , negativa y se observa que para un valor dado de COD^* , J^* es menor cuánto más negativa es β .

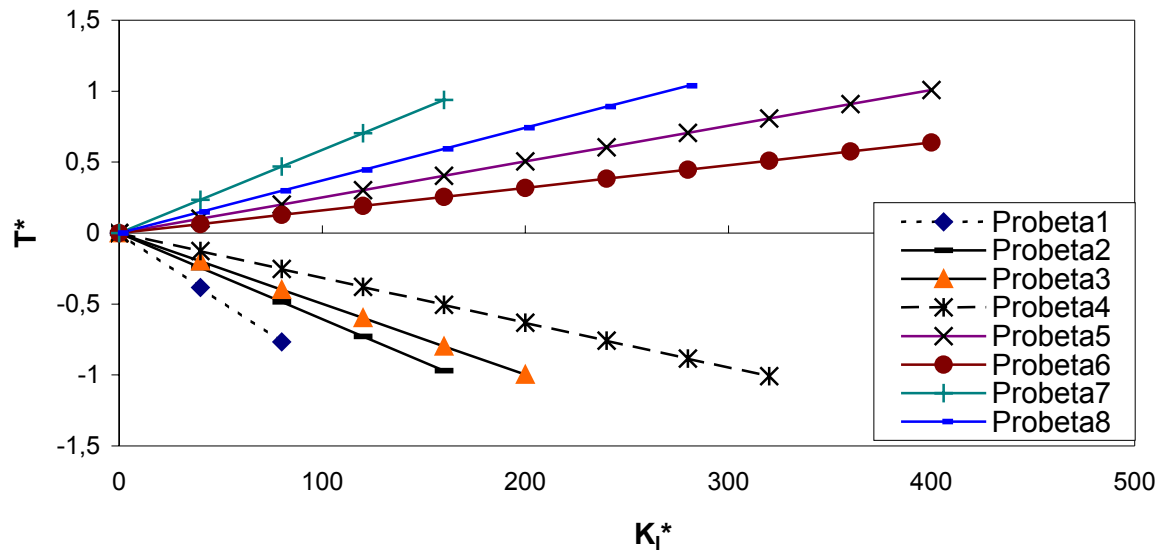


Fig. 6. Relación $T^*-K_I^*$ para las probetas analizadas

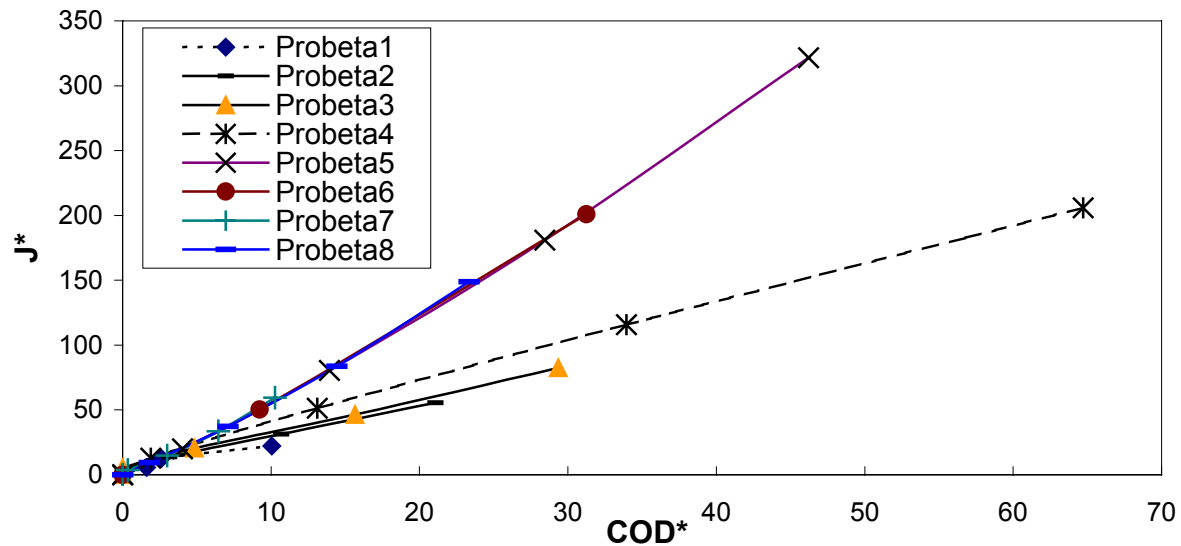


Fig. 7. Relación J^*-COD^* para las probetas analizadas

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha analizado numéricamente por el método de los Elementos Finitos la influencia de la geometría en la relación entre la integral J y el COD. Este análisis se ha llevado a cabo mediante una formulación de contorno (aplicable, únicamente, para casos de plastificación a pequeña escala) teniendo en cuenta el segundo término de la solución tensional en el extremo de una fisura. En primer lugar se ha construido las curvas J -COD para valores constantes de T y se han aplicado a probetas típicas para la obtención de las propiedades de fractura de los materiales, en las que se mantiene constante la relación de biaxialidad durante todo el ensayo. En

concreto se ha aplicado a probetas de flexión en tres puntos de diferentes dimensiones y los resultados han puesto de manifiesto la dependencia de la geometría en aquellos casos en que la relación de biaxialidad (y, por tanto, el término T) es negativa. Este estudio debe complementarse con análisis en los que se considere la geometría completa de la probetas.

REFERENCIAS

- [1] Rice, J.R. "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration of notches na cracks", Journal of Applied Mechanics, 35, 379-386 (1968).

- [2] Wells, A.A., "Application of fracture mechanics at and beyond general yielding", *British Welding Journal*, 563-570, (1963).
- [3] Shih, C.F. "Relationship between the J-integral and the Crack Opening Displacement for stationary and extending cracks", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 29, 305-326 (1981)
- [4] Schwalbe, K.H., Neale, B.K. y Heerens, J., "The GKSS test procedure for determining the fracture behaviour of materials: EFAM GTP 94. Report GKSS 94/E/60, (1964)
- [5] Williams, M.L. "On the stress distribution at the base of a stationary crack", *Journal of Applied Mechanics*, 24, 109-114 (1957)
- [6] Larson, S.G. y Carlsson, A.J. "Influence of non-singular terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21, 263-277 (1973)
- [7] Betegón, C y Hancock, J.W. "Two parameters characterization of elastic-plastic crack tip fields", *Journal of Applied Mechanics*, 58, 104-110 (1991)
- [8] Jayadevan, K.R., Narasimhan, R., Ramamurthy, T.S. y Dattaguru, B., "A numerical study of T-stress in dynamically loaded fracture specimens", *International Journal of Solids and Structures*, 38, 4987-5005, (2001)
- [9] Jayadevan, K.R., Narasimhan, R., Ramamurthy, T.S. y Dattaguru, B., "Effect of T-stress and loading rate on crack initiation in rate sensitive plastic materials", *International Journal of Solids and Structures*, 39, 1757-1775, (2002)
- [10] Hibbit, H.D., Karlsson, B.I. y Sorensen, E.P., *ABAQUS User Manual*, version 6.2 (2002)
- [11] Sherry, A.H., France, C.C y Goldthorpe, M.R., "Compendium of T-stress solutions for two and three dimensional cracked specimens", *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 18, 141-155, (1995).