

# UN MODELO DE FISURACIÓN DEL HORMIGÓN EN MODO MIXTO MEDIANTE FISURA COHESIVA EMBEBIDA: FUNDAMENTO TEÓRICO

J. M. Sancho \*, J. Planas \*\*, D. A. Cendón \*\*, E. Reyes \*\*\* y J. Gálvez \*\*\*

\* Universidad Politécnica de Madrid. Departamento de Estructuras de la Edificación  
E.T.S. de Arquitectura. Avda. Juan de Herrera s/n, 28040 Madrid

\*\* Universidad Politécnica de Madrid. Departamento de Ciencia de Materiales  
E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos. C/ Prof. Aranguren s/n, 28040 Madrid

\*\*\* Universidad de Castilla la Mancha. Departamento de Mecánica Aplicada e Ingeniería de Proyectos  
E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos. Avda. Camilo José Cela s/n, 13071 Ciudad Real

**Resumen.** Este trabajo presenta la implementación numérica de un modelo de fisura cohesiva para analizar la fractura de hormigón, basado en la aproximación de la discontinuidad fuerte. Se ha utilizado un modelo sencillo de fuerzas centrales para relacionar la tensión con la abertura de fisura. Los únicos parámetros necesarios para el modelo son las constantes de régimen elástico y la curva de ablandamiento del hormigón en modo I. Los grados de libertad adicionales que introduce la fisura se resuelven a nivel de la misma, lo cual evita realizar la condensación estática a nivel de elemento. Con el procedimiento utilizado para la elección del nodo solitario, no es necesario imponer la continuidad de la trayectoria de fisura. Mediante una simulación numérica se estudia la independencia de los resultados con respecto a la malla.

**Abstract.** This paper presents a numerical implementation of cohesive crack model for the analysis of concrete fracture based on the strong discontinuity approach. A simple central force model is used for the stress vs. crack opening law. The only material data required are the elastic constants and the mode I softening curve. The additional degrees of freedom defining the crack opening are determined at the crack level, thus avoiding the need of performing a static condensation at the element level. The need for a tracking algorithm is avoided using a consistent procedure for the selection of the separated nodes. Using a simple numerical simulation the mesh sensitivity is analyzed.

## 1. INTRODUCCION

Durante los últimos años se ha realizado un gran esfuerzo encaminado al desarrollo de modelos robustos capaces de simular la fractura del hormigón y otros materiales cuasifrágiles.

Una de las aportaciones que más fuerza ha cobrado durante los últimos años ha sido la denominada aproximación de la discontinuidad fuerte (SDA, Strong Discontinuity Approach, [1]). En los modelos de SDA la zona en proceso de fractura se representa mediante una superficie con un salto en el campo de desplazamientos embebido dentro de la malla de elementos finitos.

En [2] se puede encontrar un estudio comparativo entre las distintas aproximaciones basadas en el concepto de la discontinuidad fuerte.

No obstante, embeber un salto de desplazamientos no es la única forma de introducir un modelo de SDA mediante el método de los elementos finitos. Recientemente el denominado *Extended Finite Element*

*Method* (XFEM), basado en el enriquecimiento de los grados de libertad y en el concepto de la partición de la unidad, ha abierto prometedores caminos para la simulación de la fractura. Sin embargo, este método requiere un esfuerzo de implementación mucho mayor que el de la fisura embebida. Las ventajas y desventajas de ambas posibilidades pueden estudiarse en [3] y [4].

En este trabajo se muestra cómo utilizando unos componentes muy simples, la fisura embebida sigue siendo una opción muy eficiente a la hora de modelizar la fractura del hormigón.

La formulación de un elemento finito con una fisura embebida puede obtenerse a partir de la formulación del *enhanced assumed strain method* (EAS) propuesto por Simo y Rifai [5]. Según este método, la deformación originada por la discontinuidad se introduciría en la formulación del elemento como un modo adicional incompatible. Sin embargo, de esta forma, como los modos adicionales se determinan a nivel de elemento, la propagación de la fisura puede bloquearse debido a la posible incompatibilidad cinemática con las fisuras existentes en los elementos vecinos.

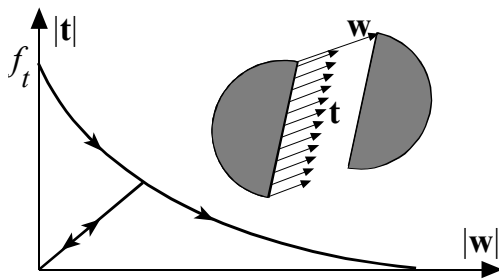
Para solucionar este problema, la mayoría de los autores han recurrido a forzar la continuidad geométrica de la fisura mediante una técnica denominada “tracking”[6]. Algunas implementaciones incluso requieren la definición de ciertas zonas de exclusión para impedir la formación de nuevas fisuras en regiones próximas a las fisuras ya existentes. Sin embargo, implementar este tipo de algoritmos en los códigos estándar de elementos finitos constituye un gran inconveniente, por ello es de gran interés el desarrollo de un método que no precise forzar la continuidad de la trayectoria de fisura.

## 2. UN MODELO SENCILLO DE FISURA COHESIVA

En [7,8] se ha mostrado que para la mayoría de las campañas experimentales de fractura en modo mixto propuestas en la literatura, la fisuración se produce realmente en condiciones de modo I local. Por ello, en este trabajo se ha utilizado una generalización del modelo de fisura cohesiva (modo I) a modo mixto, suponiendo que el vector de tracciones  $\mathbf{t}$  transmitido entre los labios de la fisura es paralelo al vector de desplazamientos  $\mathbf{w}$  (modelo de fuerzas centrales). También se supone que las descargas en la fisura se realizan hacia el origen (Fig. 1). Así el vector de tracciones puede escribirse como:

$$\mathbf{t} = \frac{f(\tilde{w})}{\tilde{w}} \mathbf{w} \quad \text{con } \tilde{w} = \max(|\mathbf{w}|) \quad (1)$$

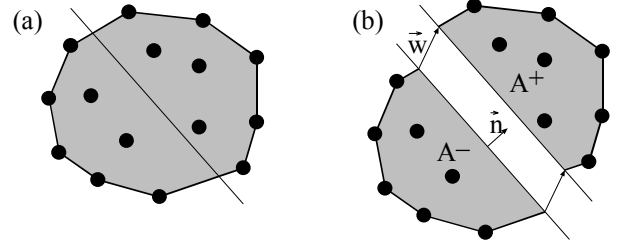
siendo  $f(\tilde{w})$  la función de ablandamiento [9] para modo I puro, y  $\tilde{w}$  una abertura de fisura equivalente que se obtiene como el máximo histórico de la norma del vector de desplazamientos entre los labios de fisura.



**Fig. 1.** Ejemplo de curva de ablandamiento del modelo de fisura cohesiva.

## 3. MODELIZACIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El trabajo se ha centrado en la modelización de la fractura de hormigón en 2D, y se ha implementado la fisura como una discontinuidad embebida en un elemento finito clásico.



**Fig. 2.** Elemento finito con una fisura de abertura uniforme: (a) elemento genérico con sus nodos y una línea de discontinuidad; (b) salto de desplazamientos a través de la línea.

### 3.1 Formulación de elementos finitos

Sea un elemento finito definido a partir de un conjunto de nodos (Fig. 2a), con una fisura recta embebida en él. Se toma una de las caras de la fisura como referencia y la normal  $\mathbf{n}$  a ella como la normal positiva. Sea  $\mathbf{w}$  el salto de desplazamientos del labio opuesto de fisura con respecto al lado tomado como referencia (Fig. 2b). La grieta separa al elemento en dos sub-dominios,  $A^+$  y  $A^-$ . Siguiendo la aproximación de la discontinuidad fuerte (ej., [10]), la aproximación al campo de desplazamientos en el elemento puede obtenerse de acuerdo con:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in A} N_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\alpha} + [H(\mathbf{x}) - N^+(\mathbf{x})] \mathbf{w} \quad (2)$$

donde  $\alpha$  es el índice del nodo,  $N_{\alpha}(\mathbf{x})$  la función de forma tradicional relativa al nodo  $\alpha$ ,  $\mathbf{u}_{\alpha}$  el correspondiente vector de desplazamientos nodales,  $H(\mathbf{x})$  la función salto de Heaviside centrada en el plano de fisura [i.e.,  $H(\mathbf{x})=0$  para  $\mathbf{x} \in A^-$ ,  $H(\mathbf{x})=1$  para  $\mathbf{x} \in A^+$ ], y  $N^+(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in A^+} N_{\alpha}(\mathbf{x})$ .

El tensor de deformaciones se obtiene a partir del campo de desplazamientos como una parte continua  $\boldsymbol{\epsilon}^c$  más una función delta de Dirac  $\delta$  situada en la línea de fisuración. La parte continua, que determina el campo de tensiones en el elemento a ambos lados de la fisura, viene dada por

$$\boldsymbol{\epsilon}^c(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\epsilon}^a(\mathbf{x}) - [\mathbf{b}^+(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{w}]^s \quad (3)$$

donde  $\boldsymbol{\epsilon}^a$  y  $\mathbf{b}^+$  vienen dadas a su vez por

$$\boldsymbol{\epsilon}^a(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in A} [\mathbf{b}_{\alpha}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}_{\alpha}]^s \quad (4)$$

$$\mathbf{b}^+(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in A^+} \mathbf{b}_{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

donde  $\mathbf{b}_{\alpha}(\mathbf{x}) = \text{grad} N_{\alpha}(\mathbf{x})$  y el superíndice  $s$  indica la parte simétrica de un tensor. Obviamente,  $\boldsymbol{\epsilon}^a$  es el tensor de deformaciones aparente del elemento, obtenido a partir de los desplazamientos nodales totales.

### 3.2 Vector de tracciones en la fisura

A lo largo de la fisura, el vector salto de desplazamientos  $\mathbf{w}$  y el vector de tracciones  $\mathbf{t}$  están relacionados mediante la Ecuación (1). Para la solución exacta, el vector de tracciones se obtiene como  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ . Para el elemento finito, sin embargo, debemos trabajar con aproximaciones de los vectores de desplazamientos y de tracciones, y no existe una única manera de relacionar el tensor de tensiones aproximado con el vector de tracciones. Para simplificar el razonamiento supondremos una tracción constante  $\bar{\mathbf{t}}$  a lo largo de la fisura. La determinación de  $\bar{\mathbf{t}}$  es aproximada, y puede hacerse de dos formas distintas: (1) como promedio del vector de tracciones local  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  a lo largo de toda la fisura, o bien (2) forzando el equilibrio global de  $A^+$  o  $A^-$  (lo cual, en este caso, equivale a aplicar el principio de los trabajos virtuales). Las ecuaciones correspondientes a ambas formulaciones quedan de la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{t}} = \frac{1}{L} \int_L \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dl \quad (\text{equilibrio local}) \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \frac{1}{L} \int_A \boldsymbol{\sigma} \mathbf{b}^+ dA \quad (\text{equilibrio global}) \quad (7)$$

en la cual el tensor de tensiones es el que corresponde con la formulación clásica del método de los elementos finitos, a partir de la deformación del continuo de la ecuación (3). En general, las ecuaciones (6) y (7) no coinciden, tal y como se muestra a continuación para un triángulo de tensión constante con una fisura embebida.

### 3.3 Triángulo de tensión constante

Consideremos un triángulo de tensión constante con una discontinuidad fuerte (fisura) como el que se muestra en la Fig. 3a. Seleccionando la normal positiva como aquella que apunta hacia el nodo solitario, entonces es fácil ver que

$$\mathbf{b}^+ = \frac{1}{h} \mathbf{n}^+ \quad (8)$$

donde  $h$  es la altura del triángulo medida sobre el lado opuesto al nodo solitario y  $\mathbf{n}^+$  el vector unitario normal a dicho lado. De esta forma, teniendo en cuenta que en este tipo de elemento la tensión es constante, las ecuaciones (6) y (7) se reducen a

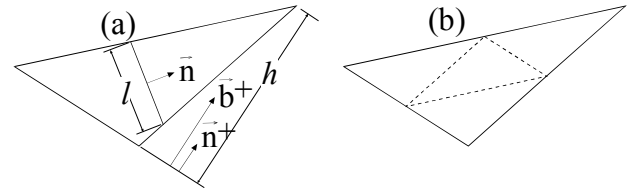
$$\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \text{para equilibrio local} \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \frac{A}{hL} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^+ \quad \text{para equilibrio global} \quad (10)$$

donde  $A$  es el área del elemento y  $L$  es la longitud de la fisura. Esto quiere decir que para que se cumplan simultáneamente equilibrio local y global, es preciso que  $\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}$  y que  $hL = A$ . Esto es equivalente a las dos condiciones siguientes: (1) la línea de discontinuidad

(fisura) debe ser paralela a uno de los lados del triángulo, y (2) la línea de discontinuidad debe estar localizada en la mitad de la altura. Así, las potenciales líneas de fisura que satisfacen ambas condiciones son las que se muestran con líneas discontinuas en la Fig. 3b.

En nuestra aproximación, el equilibrio local de la ecuación (9) es utilizado junto con la aproximación del campo de deformaciones dado por la ecuación (3). Esto conduce a una formulación no simétrica (SKON, de acuerdo con la nomenclatura utilizada en [2]). Si se utiliza la Ecuación (10), entonces se obtiene una formulación simétrica (KOS, según [2]). No obstante, hay que tener en cuenta que cualquiera de las dos aproximaciones coinciden cuando la grieta se propaga paralela a uno de los lados del elemento, y a la mitad de la altura (no a través del centroide).



**Fig. 3.** Triángulo de tensión constante: (a) definiciones geométricas; (b) grietas potenciales que satisfacen, tanto el equilibrio local, como el global (líneas de trazos).

## 4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Para la implementación numérica se ha supuesto comportamiento elástico y lineal fuera de la fisura. El vector de desplazamientos de la fisura  $\mathbf{w}$  se ha tratado como dos grados de libertad adicionales que se resuelven en el elemento, a nivel de fisura.

### 4.1 Ecuaciones básicas

Una de las tareas fundamentales de la implementación es obtener el tensor de tensiones en el elemento, para lo cual se emplea un algoritmo similar a los utilizados en plasticidad clásica, puesto que el tensor de tensiones se obtiene, teniendo en cuenta el comportamiento elástico y lineal fuera de la fisura y la Ecuación 3, como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}^a - (\mathbf{b}^+ \otimes \mathbf{w})^s \right] \quad (11)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el tensor del módulos elásticos. Previamente a calcular el resultado de las tensiones, hay que resolver los desplazamientos de fisura, lo cual se obtiene de la Ecuación (9) y el comportamiento de la fisura cohesiva dado por la Ecuación (1), lo que lleva a la condición

$$\frac{f(\tilde{\mathbf{w}})}{\tilde{\mathbf{w}}} \mathbf{w} = \mathbf{E} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}^a - (\mathbf{b}^+ \otimes \mathbf{w})^s \right] \mathbf{n} \quad (12)$$

Para resolver esta ecuación se emplea el método de Newton-Raphson, ya que los desplazamientos nodales son conocidos (y por tanto, también  $\epsilon^a$ ) y, una vez que se ha formado la fisura,  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}^+$  son también conocidos. Obviamente, uno de los puntos clave es cómo se introduce la fisura en el elemento, es decir, cómo de determinan  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}^+$ .

#### 4.2 Iniciación de la fisura

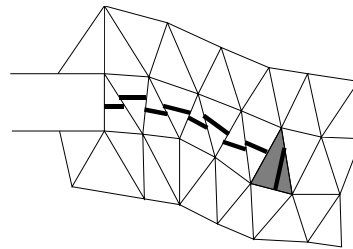
Inicialmente,  $\mathbf{w}=0$  en el elemento, y  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}^+$  no están definidos. En este estado el elemento se va cargando elásticamente y  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\epsilon^a$  hasta que la máxima tensión principal supera la resistencia a tracción. Entonces se introduce una fisura perpendicular a la dirección de tensión principal máxima, y  $\mathbf{n}$  se obtiene como un autovector unitario del tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ .

A continuación se determinan el nodo solitario y el vector  $\mathbf{b}^+$  imponiendo que el ángulo formado por  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}^+$  sea el menor de los posibles (ver Fig. 3). Esto es equivalente a elegir el nodo solitario de forma que el lado opuesto a él sea lo más paralelo posible a la dirección de la fisura. Este procedimiento está basado en la observación realizada por Borja [11] según la cual, el comportamiento de este tipo de elemento es mejor cuando la fisura alcanza esta condición, también se basa en el análisis realizado en la sección precedente, según el cual los equilibrios global y local sólo se alcanzan simultáneamente cuando  $\mathbf{n}$  es paralelo a  $\mathbf{b}^+$ .

#### 4.3 Adaptación de la fisura

El siguiente procedimiento se realiza a nivel de elemento, y es estrictamente local: en ningún momento se fuerza la continuidad de fisura, ni se imponen zonas de exclusión a la fisura. En ocasiones esto lleva al bloqueo de la fisura después de una cierta propagación. Este bloqueo parece deberse a una mala predicción de la dirección de propagación de la fisura en el elemento que está justo detrás de la punta de la fisura pre-existente, tal y como se muestra en la Fig. 4.

Para eliminar este problema sin introducir algoritmos de carácter global (*tracking* de la fisura, o definición de zonas de exclusión), se ha introducido una cierta adaptabilidad de la fisura en cada elemento. El razonamiento que sustenta este método se basa en que la estimación de las direcciones principales de un elemento triangular es especialmente mala debido a los altos gradientes de tensiones que se producen en la punta de la fisura, donde el nuevo elemento que va a fisurarse suele estar situado; una vez que la fisura avanza un poco más, la estimación de las direcciones principales de tensiones normalmente mejora de forma substancial. De este modo permitimos a la fisura del elemento que se adapte a las variaciones de tensión principal que se producirán con posterioridad, mientras su abertura sea pequeña.



**Fig. 4.** Esquema del bloqueo de fisura: la predicción de la dirección de fisuración del elemento sombreado es errónea.

La adaptación de la fisura se implementa de forma sencilla, imponiendo que mientras que la abertura de fisura equivalente  $\bar{w}$  en un determinado elemento no supere un cierto valor  $\bar{w}_{th}$ , la dirección de fisura es recalculada en cada paso, como si se acabase de crear. Una vez que se alcanza la condición  $\bar{w} > \bar{w}_{th}$ , la dirección de fisura queda fija. Los valores límite  $\bar{w}_{th}$  deben estar relacionados con las propiedades de la curva de ablandamiento del material, y valores del orden de  $0.1G_F/f_t$  proporcionan normalmente resultados satisfactorios. Hemos denominado  $G_F$  a la energía de fractura y  $f_t$  a la resistencia a tracción.

Este procedimiento tan sencillo se ha mostrado extremadamente eficaz en la práctica y tiene un cierto paralelismo con procedimientos utilizados por otros autores para evitar el bloqueo de fisura. Por ejemplo Tano et al. [12] utilizaron un modelo con fisura rotante para evitar el bloqueo y Jirásek y Zimmermann [13] utilizaron un modelo de fisura distribuida rotante al comienzo de la fisuración. En nuestra aproximación la adaptación de la fisura solventa la deficiente representación de las direcciones principales, y no debe tomarse como una propiedad del material adicional.

### 5. SIMULACIONES NUMÉRICAS

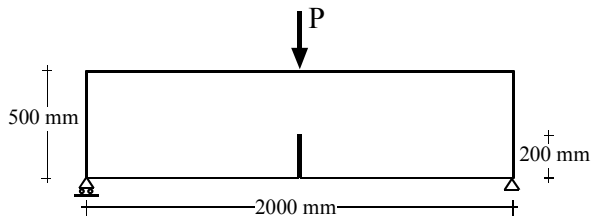
#### 5.1 Códigos utilizados

El modelo descrito se ha introducido en dos códigos de elementos finitos: FEAP y ABAQUS.

#### 5.2 Simulaciones

Para verificar la independencia de los resultados respecto a la malla utilizada, se simuló un ensayo de flexión en tres puntos utilizando mallas distintas. Las dimensiones de la viga fueron: longitud = 2000 mm, espesor = 100 mm, y canto = 500 mm. Se utilizó una única entalla de 200 mm de profundidad y de 5 mm de grosor, tal y como se muestra en la Fig. 5.

Los parámetros de material utilizados fueron: resistencia a tracción  $f_t = 2,5$  MPa, módulo de elasticidad = 20 GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$  y energía de fractura  $G_F = 0,1$  N/mm. La curva de ablandamiento utilizada fue de tipo exponencial.

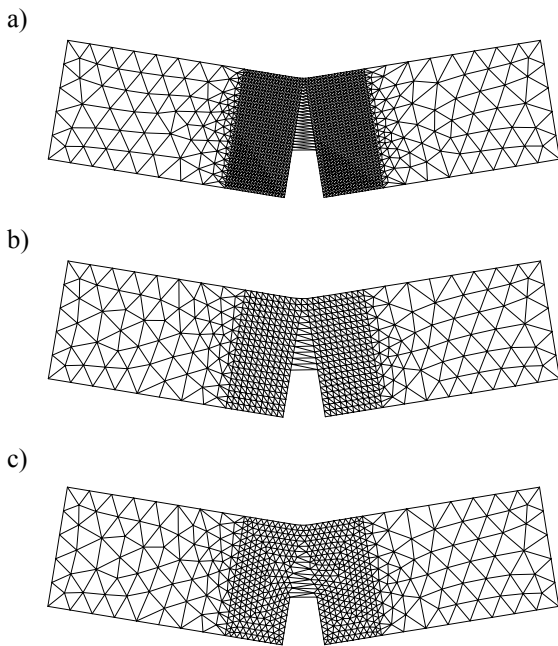


**Fig. 5.** Viga de flexión en tres puntos.

Las tres mallas utilizadas (Fig. 6) fueron: una estructurada de tamaño de elemento pequeño, (3664 elementos); otra estructurada de tamaño de elemento grande, (1110 elementos); y finalmente una no estructurada de tamaño de elemento grande, (1166 elementos).

Como referencia para comparar los resultados, se utilizó el programa Splitting-Lab, basado en un método muy preciso de integrales de contorno (método de *smeared tip*; ver [14]).

Tal y como se aprecia en la Fig. 6, las deformadas al final del proceso de carga (1 mm de deflexión) son prácticamente idénticas. Hay que tener en cuenta que en las mallas estructuradas uno de los lados de los elementos fisurados es siempre paralelo a la fisura vertical, por ello los vectores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}^+$  son paralelos, así la fisura se puede propagar perfectamente vertical; esto no ocurre en el caso de la malla no estructurada la cual, sin embargo sigue siendo capaz de reproducir correctamente la fisura macroscópica que realmente se produce en este tipo de ensayo (ver Fig. 7).

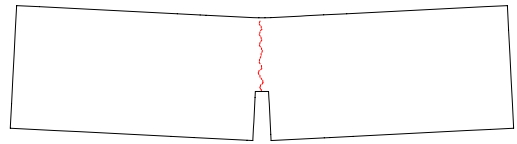


**Fig. 6.** Mallas deformadas: a) estructurada de elementos pequeños; b) estructurada de elementos grandes; c) no estructurada de elementos grandes.

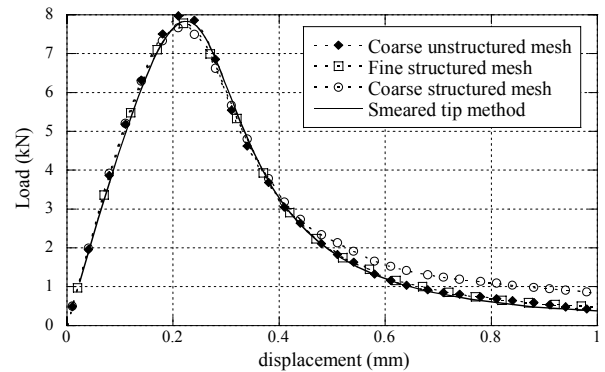
La Fig. 8 muestra el registro carga-desplazamiento obtenidos con las tres mallas y la curva de referencia obtenida con el Splitting-Lab. Puede apreciarse que la aproximación obtenida con todas las curvas es excelente: la malla no estructurada con tamaño de elemento grande ligeramente sobreestima el pico de carga, mientras que la malla estructurada de elementos grandes da un valor de carga mayor en la cola del registro. La malla no estructurada de elementos grandes obtiene unos resultados sorprendentemente precisos en la zona de la cola. No se aprecia en los resultados dependencia del tamaño de malla.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha utilizado la discontinuidad fuerte para modelizar el comportamiento en fractura del hormigón. La discontinuidad se ha simulado concentrando en una línea el concepto de fisura cohesiva. Como relación constitutiva discreta, se ha utilizado una generalización del modelo de fisura cohesiva al modo mixto.



**Fig. 7.** Trayectoria de fisura obtenida con la malla no estructurada de elementos grandes.



**Fig. 8.** Resultados numéricos del ensayo TPB con las tres mallas utilizadas.

La formulación se ha aplicado a un elemento finito triangular de tensión constante y se ha implementado en un código de elementos finitos estándar. El algoritmo utilizado para obtener el vector de desplazamientos de fisura se puede formular al nivel del punto de integración y, de esta forma, se puede resolver a nivel de material sin necesidad de formular un nuevo elemento finito. La elección del nodo solitario se hace de forma que la propagación de la fisura se realiza automáticamente sin tener que forzar la continuidad de

la fisura. Los fenómenos de bloqueo de la fisura se han resuelto dejando a la fisura adaptarse al campo de tensiones mientras la abertura de fisura no alcanza un determinado valor límite.

Por último, mediante simulación numérica del ensayo de flexión en tres puntos, se ha mostrado la independencia de los resultados con respecto a la malla.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al Profesor J. Oliver su asesoramiento y sus consejos. Asimismo agradecen también la financiación proporcionada por el Ministerio de Ciencia y Tecnología a través de los proyectos MAT2001-3863-C03-01 y 02

## REFERENCIAS

- [1] Simo J., Oliver J., & Armero F. 1993. "An Analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate-independent inelastic solids". *Comp. Mech.* 12: 277-296.
- [2] Jirásek M., 2000. "Comparative study on finite elements with embedded cracks". *Comp. Meth. in App. Mech. and Eng.* 188: 307-330.
- [3] Jirásek M., & Belytschko T. 2002. Fifth World Congress on Comp. Mech. Eds. Mang, Rammeerstorfer & Eberhardsteiner Vienna Austria.
- [4] Wells G.N. 2001. "Discontinuous modeling of strain localization and failure". Ph D. Thesis Delft University of Technology.
- [5] Simo J.C. & Rifai S. 1990. "A class mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes". *Int. J. for Num. Meth. in Eng.* 29: 1595-1638.
- [6] Oliver J., Huespe, A. E., Samaniego, E. & Chaves, E.W.V. 2002. "On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics". Fifth World Congress on Comp. Mech., Vienna, Austria.
- [7] Cendón, D.A., Galvez J.C. Elices, M. & Planas J. 2000. "Modelling the fracture of concrete under mixed loading". *Int. J. of Fracture.* Vol. 103. 293-310.
- [8] Galvez, J.C. Cendón, D.A. & Planas J. 2002. "Influence of shear parameters on mixed-mode fracture of concrete". *Int. J. of Fracture.* Vol. 118 issue 22:163-189.
- [9] Hillerborg A., Modeer M. & Petersson, P. 1976. "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements". *Cem. and Concr. Res.* 6: 773-82.
- [10] Oliver J. 1996. "Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: fundamentals. Part 2: numerical simulations". *Int. J. for Num. Meth. in Eng.* 39: 3575-3623.
- [11] Borja R.I. 2000. "A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on standard Galerkin approximation". *Comp. Meth. in App. Mech. and Eng.* 190:1529-1249.
- [12] Tano R., Klisinski M., & Olofsson T. 1998. "Stress locking in the inner softening band method : A study of the origin and how to reduce the effects". *Computational Modelling of Concrete Structures*, De Borst, Bicanic, Mang & Meschke (eds) Balkema, Rotterdam.
- [13] Jirásek M., & Zimmermann T. 2001. "Embedded crack model. Part II: Combination with smeared cracks". *Int. J. for Num. Meth. in Eng.* 50: 1291-1305.
- [14] Bazant, Z.P. & Planas, J. 1998 "Fracture and Size Effect of Concrete and Other Quasibrittle Materials". CRC Press, Boca Raton, FL, USA.