

ANÁLISIS PROBABILISTA DEL PROCESO DE ACUMULACIÓN DE DAÑO PARA CEMENTOS PROTÉSICOS INCORPORANDO EFECTOS DE PÉRDIDA DE RIGIDEZ

Jorge Grasa, Rafael Ferrer, M^a Angeles Pérez

Grupo de Estructuras y Modelado de Materiales (GEMM). Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A), Universidad de Zaragoza, María de Luna, 3, CP-50018, España

Resumen. En el presente trabajo se muestra un nuevo modelo para la predicción de vida a fatiga aleatoria del cemento en prótesis de cadera cementadas, el cual incorpora el efecto degenerativo de pérdida de rigidez sobre el cemento como consecuencia de la aparición y posterior propagación de grietas. Para la construcción de este modelo se ha utilizado una metodología basada en los elementos finitos probabilistas (PFEM) y modelos B de acumulación de daño. Los modelos B, desarrollados por Bogdanoff y Kozin, basados en las cadenas de Markov suelen utilizarse para tratar procesos de daño acumulado en fatiga a partir de datos experimentales. En este estudio se construyen a partir de los resultados obtenidos mediante sucesivos análisis por elementos finitos probabilistas en los cuales, se han tomado como variables aleatorias de entrada las cargas originadas en el proceso de caminar y el daño en el cemento. Para determinar la vida del cemento se ha considerado también que es una variable aleatoria para de esta forma conseguir predecir las zonas de mayor probabilidad de fallo.

Abstract. In the current paper a new model for random life prediction in the cement of hip implants have been proposed, this model incorporates the degenerative effect of stiffness loss. With this purpose we have used probabilistic finite elements (PFEM) and B models, developed by Bogdanoff and Kozin. These B models, usual in the treatment of cumulative damage processes, have been used in the fatigue field just using experimental data. But in the current work they have been built by means of numerical results, obtained from the PFEM calculations. Two random variables have been considered in order to construct PFEM analysis, muscle forces at the hip (walking) and damage in the cement. Cement life has been considered as a random variable too to predict the most probability failure regions.

1. INTRODUCCIÓN

El proceso cíclico de carga y descarga al que se ven sometidas las prótesis de cadera cementadas puede originar el fallo por fatiga de alguno de los elementos que componen el implante. Observaciones clínicas han puesto de manifiesto que el fallo más habitual de este tipo de fijaciones se produce en la capa de cemento. Constituyendo este elemento el objeto del presente estudio.

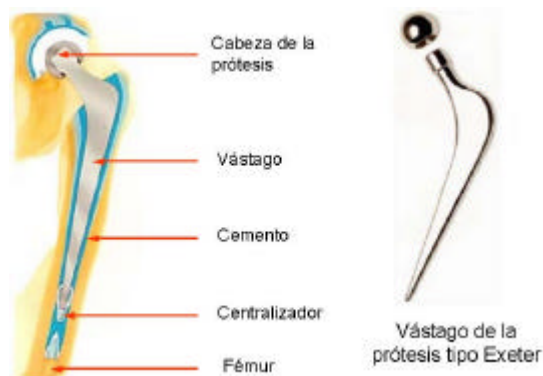


Fig. 1. Prótesis de cadera cementada.

El tratamiento efectuado en trabajos de simulación hasta el momento [1, 2, 3] han evaluado de manera determinista el daño producido dentro de la capa de cemento.

Partiendo de la teoría de la Mecánica del Daño Continuo y utilizando leyes lineales como la regla de Miner estos modelos utilizan datos experimentales de fatiga en el cemento a partir de curvas S-N y estados de cargas obtenidos también de forma empírica. Tradicionalmente, las magnitudes físicas consideradas en este tipo de trabajos se han asumido como deterministas. Sin embargo, las incertidumbres asociadas a dichas magnitudes físicas (ver Figs. 2 y 3) pueden comprometer seriamente la respuesta del sistema. De esta manera, la consideración de las propiedades del material o las cargas como variables aleatorias se encuentra claramente justificada en la actualidad. Surgiendo por ello la necesidad de trabajar con los denominados Elementos Finitos Probabilistas, que consideran las variables del problema como aleatorias y permiten obtener respuestas asociadas al mismo bajo una probabilidad dada de ocurrencia.

Para la elaboración del modelo se ha considerado la aleatoriedad de las cargas que provienen de todos los músculos que actúan sobre el fémur, la aleatoriedad de las propiedades del cemento a fatiga y la aleatoriedad del daño acumulado en la capa de cemento. Este modelo va a permitir predecir las regiones que van a presentar una mayor probabilidad de fallo así como servir de herramienta para el estudio comparativo de distintos modelos de prótesis.

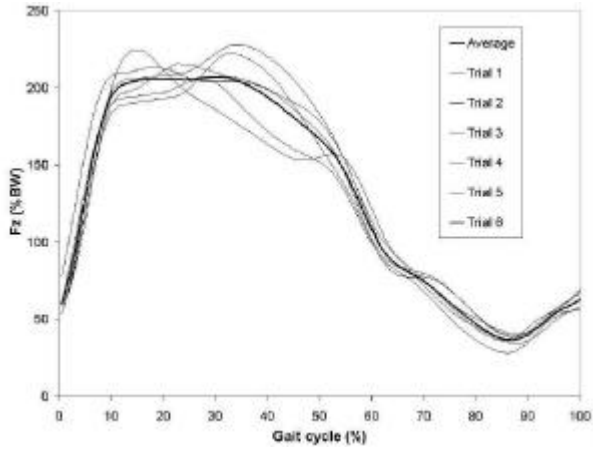


Fig. 2. Fuerza vertical sobre la articulación de la cadera durante el proceso de caminar para varios ensayos..

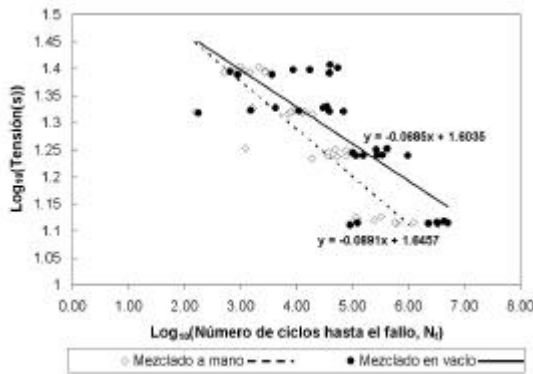


Fig. 3. Curvas S-N obtenidas para el cemento acrílico (PMMA) para los dos procesos de elaboración, mezclado a mano y mezclado en vacío.

2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El modelo probabilista de daño acumulado utiliza como variables de entrada los resultados de sucesivos análisis por elementos finitos probabilistas. En estos análisis se incluye la aleatoriedad de las cargas que actúan sobre la prótesis y la aleatoriedad del daño que va originándose sobre la capa de cemento. El modelo utiliza los resultados de Bogdanoff y Kozin (modelos B) formulados en base a las ideas de las cadenas de Markoff [4].

2.1 MODELOS B

Las hipótesis que se establecen para la construcción de los modelos B de salto unidad son:

- Existen ciclos de daño (CD) repetitivos de severidad constante.
- Los niveles de daño son discretos, siendo el último de ellos el estado de fallo.

- La acumulación de daño en un CD depende sólo del propio CD y del nivel de daño en el inicio del CD.
- El nivel de daño en un CD solamente puede incrementarse a lo sumo del nivel ocupado en el inicio del CD al nivel inmediatamente superior (salto unidad).

Puede definirse el vector p_0 (1) como la distribución inicial de los niveles de daño para $CD=0$.

$$p_0 = \{p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_{b-1} \quad 0\} \quad (1)$$

Donde cada π_j es la probabilidad de que, inicialmente ($CD=0$), el nivel de daño ocupado sea j . Definiendo p_x (2) como la variable aleatoria nivel de daño en el $CD=x$, de nuevo se obtiene un vector de probabilidades

$$p_x = \{p_x(1) \quad p_x(2) \quad \cdots \quad p_x(b-1) \quad p_x(b)\} \quad (2)$$

En donde $p_x(j)$ es la probabilidad de que, en el ciclo de daño x , el nivel de daño alcanzado sea j . Por tanto, utilizando los resultados de las cadenas de Markoff, es posible escribir:

$$p_x = p_0 P^x = p_{x-1} P \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \dots, b \quad (3)$$

En este vector (3), la última componente representará la probabilidad de que, en el ciclo de daño x , se alcance el nivel de daño de fallo (nivel “b”). Por tanto, el conjunto de las últimas columnas de los sucesivos vectores p_x constituirá la función de distribución acumulada de la función probabilidad de fallo. Asociada a cada ciclo de daño existe la matriz de probabilidad de transición P , ya que por la primera hipótesis todos los ciclos tienen la misma severidad. Y puesto que sólo puede irse de un nivel de daño al inmediato superior, P debe ser de la forma:

$$P = \begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

El modelo B quedará construido una vez obtenida esta matriz de probabilidad de transición ya que, usualmente, suele considerarse $p_0 = \{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0\}$ (el cemento en su estado inicial se supone que no está dañado). Utilizando las expresiones que relacionan la media y la varianza del número de ciclos de vida con los términos p y q de esta matriz.

$$E[N] = \sum_{j=1}^{b-1} (1+r) \quad \text{Var}[N] = \sum_{j=1}^{b-1} r(1+r) \quad (5)$$

siendo:

$$r = \frac{p}{q} \quad (6)$$

La media y varianza del número de ciclos de vida hasta el fallo se obtiene partiendo de la expresión de las curvas S-N

$$N = \left(\frac{S}{A} \right)^{\frac{1}{B}} \quad (7)$$

Desarrollando (7) en serie de Taylor en torno a su media y truncando en primer orden (8)

$$N = N^0 + \sum_{i=1}^3 N_i^I \mathbf{a}_i + \dots \quad \text{con} \quad N_i^I = \frac{\partial N}{\partial \mathbf{a}_i} \quad (8)$$

siendo $\alpha_1 = S$, $\alpha_2 = A$ y $\alpha_3 = B$, las variables aleatorias consideradas (tensión y parámetros a fatiga del material). Es posible obtener las expresiones media (9) y varianza (10) del número de ciclos de vida como:

$$E[N] = N^0 \quad (9)$$

$$\text{Var}[N] = \sum_{i=1}^3 (N_i^I)^2 \text{Var}[\alpha_i] + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 N_i^I N_j^I \text{Cov}(\alpha_i, \alpha_j) \quad (10)$$

En estas expresiones la media y varianza de las variables aleatorias A y B han sido obtenidas de los datos experimentales procedentes de las curvas S-N. Los estadísticos de la tensión en el cemento han sido obtenidos del análisis por elementos finitos probabilistas:

Tabla 1. Media y varianza de los parámetros a fatiga de cemento.

	A		B	
	μ_A	σ_A	μ_b	σ_b
M.Vacío	40.13285	1.485	-0.0685	0.00085
M. A mano	44.228275	1.45	-0.0891	0.00065

2.2 PFEM

El análisis por elementos finitos probabilistas va a proporcionar los resultados de media y varianza de las tensiones en la capa de cemento.

La ecuación de equilibrio para problemas no lineales en un análisis por elementos finitos:

$$K(u, \mathbf{b}_i) u(\mathbf{b}_i) = f(\mathbf{b}_i) \quad (11)$$

Donde K es la matriz de rigidez tangente, f son las cargas externas y u los desplazamientos función de las variables aleatorias \mathbf{b}_i . Utilizando el método de la perturbación como medio para llegar a la obtención de los estadísticos de las variables solución del problema es necesario desarrollar en serie de Taylor cada uno de los términos de la ecuación (11).

$$K = K^0 + \sum_{i=1}^N K_i^I (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i^0) + \dots \quad \text{con} \quad K_i^I = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{a}_i} \quad (12)$$

$$u = u^0 + \sum_{i=1}^N u_i^I (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i^0) + \dots \quad \text{con} \quad u_i^I = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}_i} \quad (13)$$

$$f = f^0 + \sum_{i=1}^N f_i^I (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i^0) + \dots \quad \text{con} \quad f_i^I = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}_i} \quad (14)$$

siendo:

$$K^0(u^0)u^0 = f^0 \quad \text{o} \quad u^0 = (K^0(u^0))^{-1} f^0 \quad (15)$$

Derivando en la ecuación (11)

$$\frac{\partial K(u)}{\partial \mathbf{b}_i} u + K(u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{b}_i} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}_i} \quad (16)$$

Particularizando esta expresión para las variables aleatorias consideradas (cargas sobre la prótesis y daño en el cemento) resulta:

$$\mathbf{b}_1 = f \Rightarrow K(u) \frac{\partial u}{\partial f} = 1 \quad (17)$$

$$\mathbf{b}_2 = D \Rightarrow K(u) \frac{\partial u}{\partial D} + \frac{\partial K(u)}{\partial D} u = 0$$

Que en el caso de un problema lineal la obtención de las sensibilidades de los desplazamientos con respecto a las variables aleatorias $\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{b}_i} \right)$ pueden obtenerse directamente sin mas que resolver:

$$K^0(u^0) \frac{\partial u}{\partial f} = 1 \quad (18)$$

$$K^0(u^0) \frac{\partial u}{\partial D} = -\frac{\partial K^0(u)}{\partial D} u^0$$

De la resolución de (18) y obtenidas las sensibilidades de manera análoga para la solución en tensiones, puede obtenerse:

$$E[u] = u^0 \quad E[\mathbf{s}] = \mathbf{s}^0 \quad (19)$$

$$\text{Cov}[u_1, u_2] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{1i}^I (u_{2j}^I)^T \{E[\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j] - E[\mathbf{b}_i] E[\mathbf{b}_j]\} \quad (20)$$

$$\text{Cov}[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{s}_{1i}^I (\mathbf{s}_{2j}^I)^T \{E[\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j] - E[\mathbf{b}_i] E[\mathbf{b}_j]\} \quad (21)$$

Resultados que aparecen en función de la media y varianza de las variables aleatorias consideradas. Los estadísticos de las cargas que actúan sobre el fémur han sido obtenidos de trabajos de diversos autores [5,6]. Para determinar los estadísticos correspondientes al daño en el cemento se ha considerado que la influencia de éste sobre el cemento se traduce en una pérdida de rigidez del mismo.

Definiendo el daño como:

$$D = \frac{n}{N} = \frac{n}{\left(\frac{S}{A}\right)^{\frac{1}{B}}} \quad (22)$$

y desarrollando en serie de Taylor:

$$D = D^0 + \sum_{i=1}^N D_i^I (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i^0) + \dots \quad \text{con} \quad D_i^I = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{a}_i} \quad (23)$$

Es posible obtener:

$$E[D] = D^0 \quad (24)$$

$$Var[D] = \sum_{i=1}^3 (D_i^I)^2 Var[\mathbf{a}_i] + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 D_i^I D_j^I Cov(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \quad (25)$$

siendo en esta ocasión $\mathbf{a}_i = N, S, A, B$

De esta forma, y tras sucesivos análisis de elementos finitos probabilistas, discretizando la evolución del daño, es posible caracterizar la variable aleatoria probabilidad de fallo del cemento.

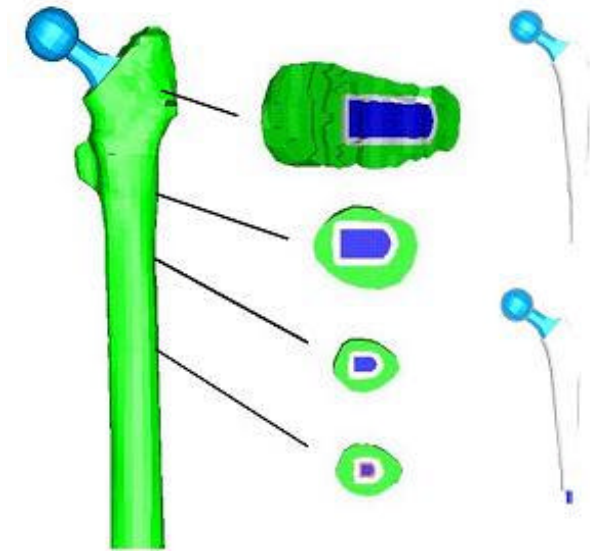


Fig. 5. Modelo de elementos finitos construido considerando la existencia o no de cemento en la zona distal.

3. RESULTADOS

En este epígrafe se muestran una serie de resultados consecuencia de la aplicación del modelo de acumulación de daño planteado para la prótesis de cadera tipo Exeter.

Numerosos estudios experimentales [7,8] han demostrado que la acumulación de daño en la capa de cemento es una de las más importantes causas de fallo del implante. Estableciendo que las zonas en las cuales falla el cemento son las regiones proximal y distal, hecho

que ha quedado recogido en los resultados obtenidos con el modelo (Figs 7 y 8).

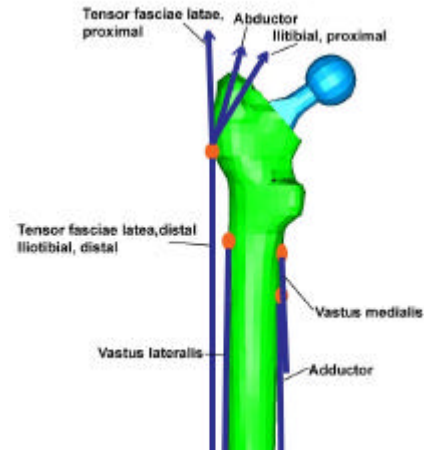


Fig. 6. Cargas de los músculos que actúan sobre el fémur.

Además, ha sido puesto de manifiesto que la actividad de subir escaleras es mucho más desfavorable que la de caminar. Apreciándose esto en una mayor probabilidad de fallo de los puntos del cemento para un mismo número de ciclos.

Los resultados mostrados en las figuras únicamente incorporan la aleatoriedad de las cargas y las propiedades del material.

Varios casos de estudio han sido considerados:

1. Proceso de mezclado del cemento, mezclado a mano o mezclado en vacío.
2. Actividad realizada por el individuo, caminar o subir escaleras.
3. Configuración de la interfaz cemento-prótesis, completamente unido o suelta con rozamiento.

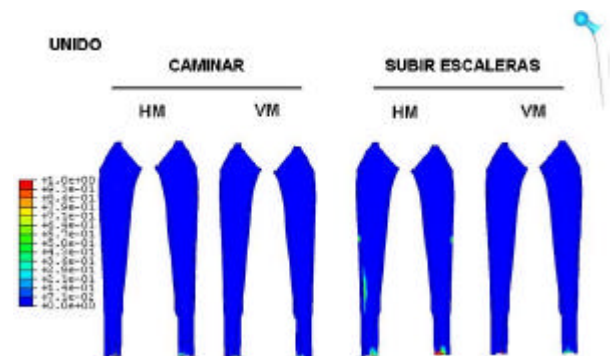


Fig. 7. Probabilidad de fallo en el cemento para una configuración de la interfaz cemento-prótesis unida para 25 millones de ciclos.

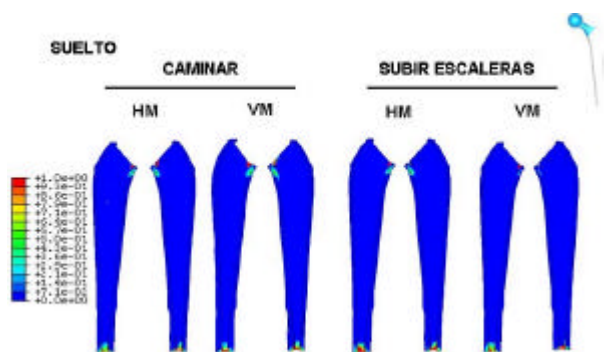


Fig. 8. Probabilidad de fallo en el cemento para una configuración de la interfaz cemento-prótesis suelta con rozamiento para 25 millones de ciclos.

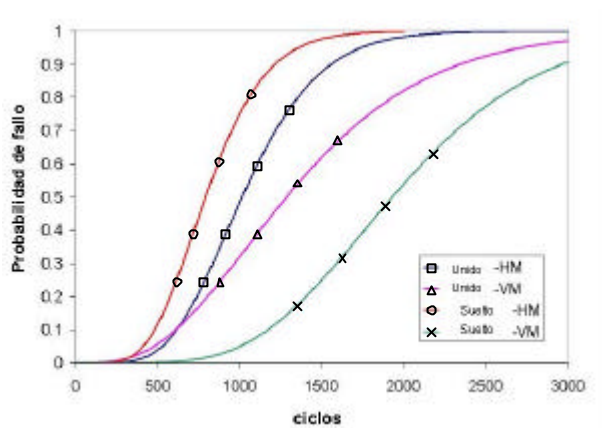


Fig. 9. Curvas de acumulación de daño para el cemento en la zona distal para las configuraciones suelta y unido para una actividad de subir escaleras.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado la aplicación de una nueva metodología probabilista que permite estudiar la influencia que sobre la vida del cemento en prótesis de cadera ejercen una serie de parámetros (cargas sobre la prótesis parámetros a fatiga del material y daño en el cemento). Además, de la aplicación de esta metodología, se ha podido comprobar los efectos de considerar una interfaz cemento-prótesis completamente unida o suelta con rozamiento.

Los resultados presentados ponen de manifiesto el hecho de que las condiciones en las que la interfaz cemento-prótesis se encuentre (suelta con rozamiento o unida) condicionan drásticamente la vida del cemento. Cuando dicha interfaz se encuentra suelta es mucho más desfavorable que cuando está unida (Figs. 7 y 8). Estos análisis han sido efectuados sin considerar la evolución del daño.

Resulta necesario estudiar cómo afectan las condiciones de la interfaz al hueso. En el caso de unión perfecta las tensiones en el cemento son muy bajas, y como consecuencia de esto, las tensiones transmitidas al hueso también son bajas, lo que supone que el estímulo

disminuya, y por lo tanto se produzca pérdida de masa ósea. De este modo, a largo plazo, el hueso puede fallar por la zona donde se está reabsorbiendo. Por el contrario, la situación opuesta, cemento y prótesis sueltos experimentando fricción entre ellos, supone una elevación de las tensiones en la capa de cemento, lo que da lugar a una menor vida del mismo y por lo tanto del implante. Esta situación supone el fallo de la fijación por el cemento mientras que es favorable para el hueso, ya que las elevadas tensiones transmitidas al hueso actúan como estímulo para la formación ósea.

La Fig. 9 pone también de manifiesto que si bien es preferible el proceso de mezclado en vacío frente al proceso de mezclado a mano, en mezclado en vacío se obtiene una gran dispersión de resultados consecuencia de la mayor variabilidad observada en las curvas S-N.

Los trabajos efectuados hasta el momento estudian el caso de carga más desfavorable dando un resultado de vida totalmente determinista. A diferencia de estos trabajos el modelo propuesto es capaz de predecir la vida del componente bajo una probabilidad de ocurrencia. Intentando así determinar para un número fijado de ciclos de vida las zonas de la capa de cemento que presenten mayor probabilidad de fallo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a Dr. P. J. Prendergast por los datos proporcionados sobre las propiedades a fatiga de cementos acrílicos. También desean agradecer a Dr. Bergmann, Dr. Héller y Dr. Morlock la información aportada en las configuraciones de cargas para varias actividades en la articulación de la cadera.

REFERENCIAS

- [1] Prendergast P. J., "The functional performance of orthopaedic bone cement", Key Engineering Materials, 198-199, pp 291-300, (2001)
- [2] Colombi P., "Fatigue analysis of cemented hip prosthesis: model definition and damage evolution algorithms", International Journal of Fatigue, 24 (8), 895-901, (2002)
- [3] Stolk J., Verdonchot N., Murphy B. P., Prendergast P. J., Huiskes R., "Finite element simulation of anisotropic damage accumulation and creep in acrylic bone cement", Engineering Fracture Mechanics, (in press).
- [4] Bogdanoff J. L., Kozin F., "Probabilistic Models of Cumulative Damage", Wiley & Sons Inc. (1985)

- [5] Bergmann G., G. Deuretzbacher, M. Heller, F. Graichen, A. Rohlmann, J. Strauss, G. N. Duda, "Hip contact forces and gait patterns from routine activities", *Journal of Biomechanics*, 34, 859-871, (2001)
- [6] Bergmann G., M. Heller, G. N. Duda, "Preclinical testing of cemented hip replacement implants: Pre-Normative Research for a European Standard". Final Report of Workpackage 5 Development of the Loading Configuration, EU Contract SMT4-CT96-2076, 1999. HIP98. Berlin, Free University 2001.
- [7] M. Jasty, W. J. Maloney, C. R. Bragdon, D. O. O'Connor, T. Haire and W. H. Harris. "The initiation of failure in cemented femoral components of hip arthroplasties". *J Bone Joint Surg*, 73-B:551-558 (1991)
- [8] T. A. Gruen, G. M. McNeice and H. C. Amstutz. "Modes of Failure of Cemented Stem-Type Femoral Components". *Clin Ortho Rel Res*. 141:17-27 (1979).
- [9] Murphy B. P., Prendergast P. J., "On the magnitude and variability of the fatigue strength of acrylic bone cement", *International Journal of Fatigue*, 22,855-864, (2000)
- [10] Kawate K., Maloney W. J., Bragdon C. R. , Biggs S. A., Jasty M., Harris W. H., "Importance of a thin cement mantle", *Clinical Orthopaedics and Related Research*, 355, 70-76 (1998).
- [11] Fisher D. A., Tsang A. C., Paydar N., Milionis S., Turner C. H., "Cement-mantle thickness affects cement strains in total hip replacement", *J. Biomechanics*, 30 (11-12), 1173-1177 (1997)
- [12] Verdonschot N., Huiskes R., "Subsidence of THA stems due to acrylic cement creep is extremely sensitive to interface friction", *J. Biomechanics*, 29,1569-1575 (1996)
- [13] Doblaré M., García J. M., "Anisotropic bone remodelling model based on a continuum damage-repair theory", *Journal of Biomechanics*, 35(1): 1-17, (2002)
- [14] Verdonschot N., Huiskes R., "Acrylic cement creeps but does not allow much subsidence of femoral stems", *J. Bone Joint Surgery*, 79-B (4), 665- 669, (1997)
- [15] Stolk J., Verdonschot N., Huiskes R., "Hip-joint and abductor-muscle forces adequately represent in vivo loading of a cemented total hip reconstruction", *J. Biomechanics*, 34, 917-926, (2001)
- [16] Heller M. O., G. Bergmann, G. Deuretzbacher, L. Dürselen, M. Pohl, L. Claes, N. P. Hass, G. N. Duda, "Musculo-skeletal loading conditions at the hip during walking and stair climbing", *Journal of Biomechanics*, 34: 883-893, (2001)
- [17] Hisada T., Nakagiri S., "Role of the stochastic finite element method in stochastic analysis of structures". *Proc. 4th Int. Conf. Structural Safety and Reliability.*, ICOSSAR '81, Trondheim, Norway, 395-408, (1981)
- [18] Bea, J.A., "Simulación del crecimiento de grietas por fatiga aleatoria mediante elementos finitos probabilistas", *Tesis Doctoral*, Universidad de Zaragoza (1997)
- [19] Bea, J.A., Doblaré, M., Villanueva, I., Gracia, L., "Corrections to B-Models for Fatigue Life Prediction of Metals during Crack Propagation", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp. 1405-1420 (1999)

