

# INFLUENCIA DE LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN LA EXTRACCIÓN DEL FIT MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

F.J. Fuenmayor, O.A. González, J. Carballeira, E. Giner

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera, s/n, 46022-Valencia, España

**Resumen.** El MEF es una de las herramientas numéricas más utilizadas en la simulación de componentes con grietas y permite obtener de forma precisa los FIT para geometrías cualesquiera. Sin embargo, en su versión convencional, es necesario modelar explícitamente las caras de grieta, por lo que es poco efectivo en problemas de análisis de crecimiento de grieta. El método de los elementos finitos extendido (XFEM) permite salvar este inconveniente, ya que incluye funciones discontinuas de interpolación en una malla no adaptada geoméricamente al contorno de la grieta. Debido precisamente a esta discontinuidad en la interpolación, en el XFEM es necesario realizar una integración numérica por subdominios, y el error inducido en la extracción del FIT puede depender en gran medida de la metodología utilizada. En este trabajo se analiza la influencia de la integración numérica en la precisión con que se calcula el FIT, y se propone una metodología de subdivisión por triangulación con vértice en extremo de grieta.

**Abstract.** The FEM is one of the most used computational methods for modelling cracked components. It enables to obtain accurate values of the SIF for any arbitrary geometry. However, it is not well suited to analyze crack growth problems, since the FE mesh needs to model the crack geometry explicitly. The extended finite element method (XFEM) avoids the need of generating a mesh adapted to the crack geometry by including discontinuous interpolating functions. In the XFEM, the numerical integration procedures must be performed over subdomains within the elements intersected by the crack location due to the interpolation discontinuity. In this work, we analyze the influence of the numerical integration methodology used and we show that it can affect the accuracy of the computed SIF. An improved integration methodology is proposed based on a subdomain triangulation of the crack tip element.

## 1. INTRODUCCIÓN

Para analizar componentes con grietas, el método de los elementos finitos ofrece diferentes técnicas para simular con precisión el comportamiento singular del extremo de grieta. En general se pueden aplicar refinamientos de malla, utilizar diversos tipos de elementos de extremo de grieta o incluso es posible realizar estimaciones de la precisión con la que se calcula el FIT y definir procesos adaptativos automáticos que resuelvan el problema con la precisión deseada por el usuario [1,2]. Sin embargo, extender este planteamiento al problema de propagación de una grieta es complicado debido a las necesarias modificaciones en la topología de la malla. En los primeros trabajos que abordan este problema mediante elementos finitos, se propone un enfoque de liberación de nodos para modelar el avance de grieta. Para problemas en los que la trayectoria es conocida este enfoque es sencillo de aplicar, pero no ocurre así en el caso contrario.

En la actualidad se han desarrollado diversas estrategias numéricas que permiten simular con precisión los procesos de fractura en los que no se conoce previamente la evolución geométrica de la grieta. Una de estas metodologías está basada en el solapamiento de dos mallas: una local, adaptada a la simulación del

extremo de grieta, y otra global que define el resto del problema [3]. Otra posibilidad es utilizar procedimientos adaptativos de elementos finitos, que permitan obtener resultados precisos y simular la evolución del frente de grieta [4]. En ambos casos, es necesario redefinir la discretización de elementos finitos, adaptándola a la situación del extremo de grieta. Las dificultades y el esfuerzo requerido (computacional y humano) asociados al remallado continuo han motivado el desarrollo de otros métodos numéricos más adaptados al problema. En este sentido, Belytschko propuso el método de los elementos finitos extendido (XFEM), que permite introducir discontinuidades de desplazamientos en una malla de elementos finitos e incorporar términos adicionales para modelar los campos singulares en el frente de grieta.

El XFEM está basado en introducir un enriquecimiento del modelo de elementos finitos (con grados de libertad adicionales) en los elementos afectados por la grieta, de forma que se pueda incorporar al modelo esta discontinuidad sin modificar la discretización. Después de una primera formulación [5], Moës [6] introduce la discontinuidad de desplazamiento mediante funciones de Heaviside para aquellos elementos intersectados por grietas. Asimismo, enriquece la formulación en el extremo de grieta mediante el primer término del

desarrollo asintótico utilizando el método de la partición de la unidad. Daux [7] considera la existencia de múltiples grietas y acuña el término ‘método de los elementos finitos extendido’. Posteriormente, el método se desarrolla para problemas tridimensionales o consideración de contacto en caras de grieta [8,9].

Para aplicar correctamente el XFEM, en los elementos afectados por la grieta, es necesario realizar integraciones numéricas mediante subdominios. Esta integración no es crítica para aquellos elementos que aunque estén afectados por la grieta, están alejados de extremo de la misma. Sin embargo, los resultados numéricos obtenidos (estimación de FIT) dependen en gran medida del método de integración utilizado en el elemento que contiene el extremo de grieta y los colindantes. En este trabajo, se propone una metodología de integración numérica cuyo objetivo es mejorar la estimación del FIT. Se propone una integración numérica en subdominios triangulares con vértice orientado al extremo de grieta. El método propuesto tiene un coste computacional similar a otros procedimientos y mejora la estimación del FIT.

Con objeto de cuantificar el error inducido en la estimación del FIT, se presenta una aplicación a un problema con solución conocida suficientemente precisa. El valor obtenido del FIT depende por una parte de la precisión de la solución numérica (que es lo que se pretende evaluar en este trabajo) y por otro del método de extracción utilizado. Los métodos basados en extrapolación local de tensiones o desplazamientos son muy sensibles a la metodología concreta utilizada en su aplicación. Con objeto de minimizar los errores inducidos por el método de extracción, y en consecuencia aislar en lo posible el error inducido por elementos finitos, se utilizará un método basado en integración de dominio.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL XFEM

En la formulación convencional de elementos finitos, la existencia de una grieta se modela explícitamente mediante la frontera de los elementos (Fig. 1). Sin embargo, en la formulación XFEM, se introduce la discontinuidad de desplazamientos mediante grados de libertad adicionales (en los nodos de los elementos intersectados por la grieta). Estos g.d.l. adicionales tienen definidas funciones de forma que incluyen la función de Heaviside (módulo unitario y cambio de signo en la cara de la grieta). De esta forma, en el caso bidimensional, la interpolación de elementos finitos, considerando un punto de coordenadas  $\mathbf{x}$ , resulta:

$$\mathbf{u}_{ef} = \sum_i N_i \mathbf{a}_i + \sum_j N_j H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j \quad (1)$$

donde las funciones ‘N’ representan las funciones de forma convencionales del elemento finito que se utilice, y  $\mathbf{a}_i$  y  $\mathbf{b}_j$  representan los grados de libertad nodales.

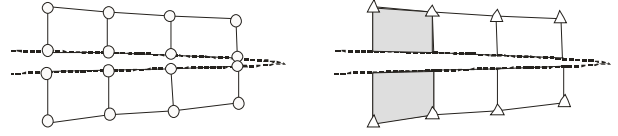


Fig. 1. Elementos finitos convencionales y XFEM.

La consideración de estos g.d.l. adicionales (y sus correspondientes funciones de interpolación) consigue describir la discontinuidad de desplazamientos si el elemento finito está intersectado por la grieta, pero no modela adecuadamente el caso en el que el extremo de grieta es interno al elemento.

El primer término del desarrollo asintótico del campo de desplazamientos en extremo de grieta es:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ \sin \frac{\theta}{2} \left[ \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ -\cos \frac{\theta}{2} \left[ \kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (2) \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{deformación plana} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{tensión plana} \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $r$  y  $\theta$ , representan coordenadas polares en el extremo de grieta,  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson. En el XFEM, se puede incluir en la formulación funciones adicionales de interpolación que representen el primer término del desarrollo asintótico del campo de desplazamientos en extremo de grieta. Estas funciones, para el caso bidimensional, son:

$$\{F_\ell(r, \theta)\} \equiv \sqrt{r} \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (3)$$

De esta forma, si el elemento finito contiene el extremo de grieta, la interpolación utilizada es:

$$\mathbf{u}_{ef} = \sum_i N_i \mathbf{a}_i + \sum_k N_k \left( \sum_{\ell=1}^4 F_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{c}_k^\ell \right) \quad (4)$$

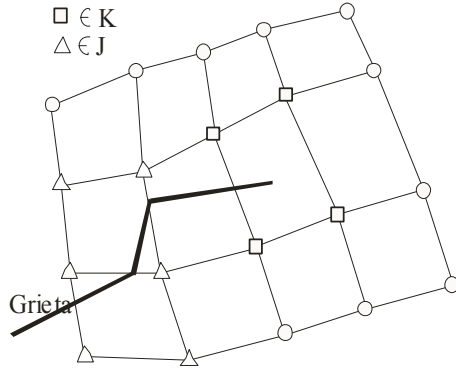
donde  $\mathbf{c}_k^\ell$  representa los grados de libertad adicionales asociados al modelado del extremo de grieta.

De forma general, considerando la presencia de un extremo de grieta en un modelo bidimensional de elementos finitos, la interpolación de desplazamientos en el XFEM se realiza mediante:

$$\mathbf{u}_{ef} = \sum_{i \in I} N_i \mathbf{a}_i + \sum_{j \in J} N_j H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j + \sum_{k \in K} N_k \left( \sum_{\ell=1}^4 F_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{c}_k^\ell \right) \quad (5)$$

I representa el conjunto de todos los nodos de la malla, K el subconjunto cuyo soporte incluye el extremo de

grieta y  $J$  el subconjunto cuyo soporte incluye la grieta y no están incluidos en  $K$  (ver Fig. 2).

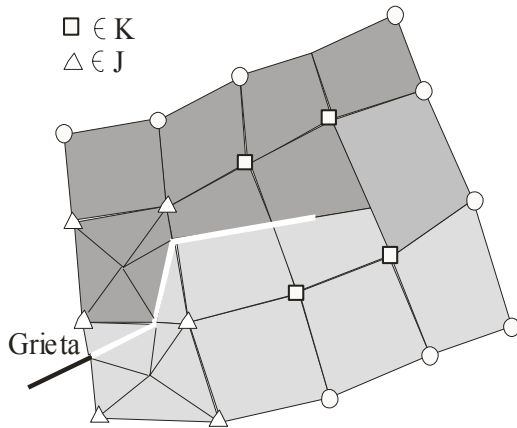


**Fig. 2.** Clasificación de nodos en XFEM.

La inclusión de g.d.l. adicionales y funciones discontinuas en la interpolación de desplazamientos ( $H(x)$  y  $F_\ell(x)$ ) permiten simular la discontinuidad de desplazamientos entre caras de grieta. Sin embargo, el hecho de que exista esta discontinuidad exige realizar una integración numérica basada en la descomposición de los elementos afectados en subdominios de integración.

### 3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

El requisito necesario para la integración numérica consiste en definir subdominios de integración que no contengan internamente la discontinuidad. De esta forma, la grieta debe considerarse como una frontera adicional en la definición de estos subdominios. Teniendo en cuenta este requisito, es posible definir los subdominios mínimos de integración, considerando los contornos de los elementos y la propia grieta como fronteras de los mismos. En la Fig. 3, se representa la definición de tales subdominios. En aquellos casos en los que el polígono resultante tenga un número mayor de lados que 4, habitualmente se procede a su subdivisión en regiones triangulares.

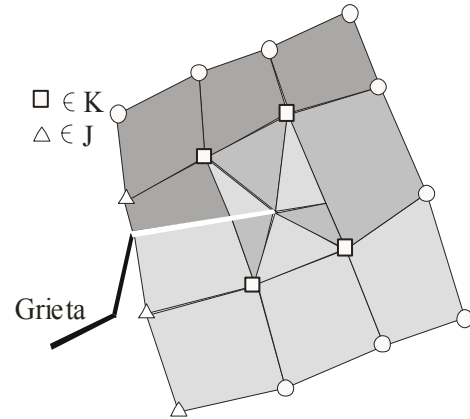


**Fig. 3.** Subdivisión mínima de integración.

La definición de estas subregiones no es crítica cuando el elemento está completamente intersectado por la

grieta. Sin embargo, cuando el elemento contiene el extremo de grieta, el resultado final del análisis (estimación del FIT) puede verse afectado en gran medida por la definición de los subdominios de integración.

En base a los resultados numéricos obtenidos para diferentes tipos de subdominios de integración, en este trabajo se propone la utilización de subdominios de integración numérica en los elementos de extremo de grieta con vértice orientado al extremo de la misma (ver Fig. 4). El coste computacional asociado a la subdivisión es mínimo, y la precisión de resultados obtenidos (FIT) presenta una mayor independencia de la posición relativa del extremo de grieta dentro del elemento.



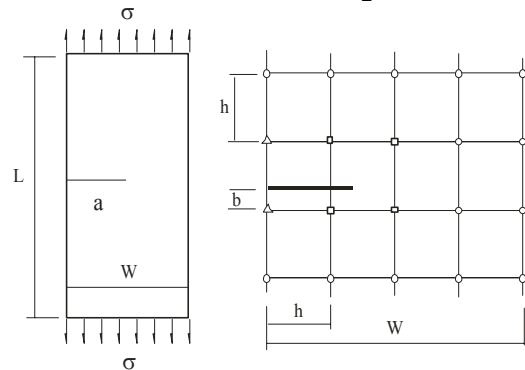
**Fig. 4.** Subdominios de integración en extremo de grieta.

### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Con objeto de analizar la influencia de la integración numérica en el XFEM, en este trabajo se considera un ejemplo de aplicación simple: una placa de anchura  $W$  y altura  $L$  con una grieta lateral de longitud  $a$  (Fig. 5). El FIT para este problema puede calcularse con un error menor que el 0.5% como [10]:

$$K_I = C\sigma\sqrt{\pi a} \quad ; \quad a_w = \frac{a}{W} \quad (6)$$

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi a_w} \operatorname{tg} \frac{\pi a_w}{2}} \frac{0.752 + 2.02a_w + 0.37 \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi a_w}{2}\right)^3}{\cos \frac{\pi a_w}{2}}$$



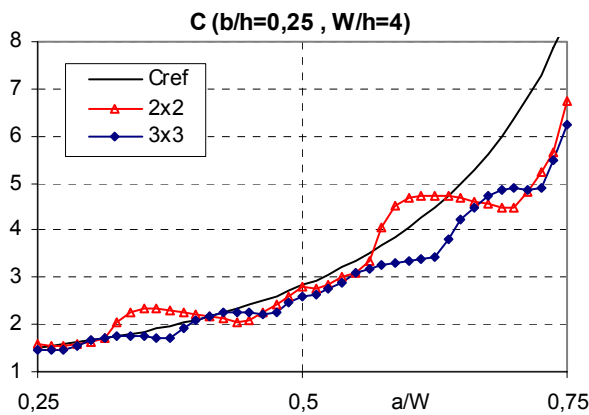
**Fig. 5.** Placa con grieta lateral.  $L/W = 6$ .

Se ha supuesto una relación  $L/W$  suficientemente elevada como para que su influencia sea despreciable en el FIT. El problema se ha resuelto inicialmente utilizando elementos cuadriláteros de 4 nodos, con tamaño 'h' tal que  $W/h=4$ . Para evitar inducir errores adicionales en la extracción del FIT se ha utilizado el método EDI (más preciso que los basados en extrapolaciones de tensiones o desplazamientos, o en integrales de contorno). De esta forma, el factor de intensidad de tensiones se obtendrá a partir de la evaluación de  $J$ .

$$J = \int_A \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - W \delta_{ii} \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} dA \quad (7)$$

La función  $q$  utilizada corresponde a una de tipo plateau. En los análisis presentados, está definida como valor unitario en los nodos situados a una distancia del extremo de grieta inferior a '3h' y cero en los restantes. Cuando un nodo de contorno está situado a una distancia inferior a '3h', la función  $q$  toma valor nulo en dicho nodo para cumplir los requisitos del método EDI.

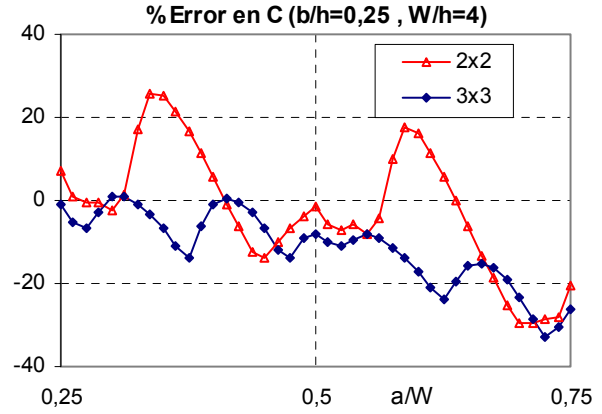
En la Fig. 6 se muestra el valor de la constante  $C$  calculada mediante XFEM considerando subdivisión mínima de integración en extremo de grieta (2 subdominios), para  $b/h = 0.25$ . En la Fig. 7 se muestra el error en el valor de  $C$ , considerando como valor exacto el definido en (6). Se ha considerado una integración numérica en 2x2 y 3x3 puntos de Gauss en las regiones cuadriláteras de integración. Como puede observarse, la solución obtenida para el factor de intensidad de tensiones presenta oscilaciones importantes alrededor de su valor exacto, en concordancia con la posición relativa de la grieta dentro del elemento finito correspondiente.



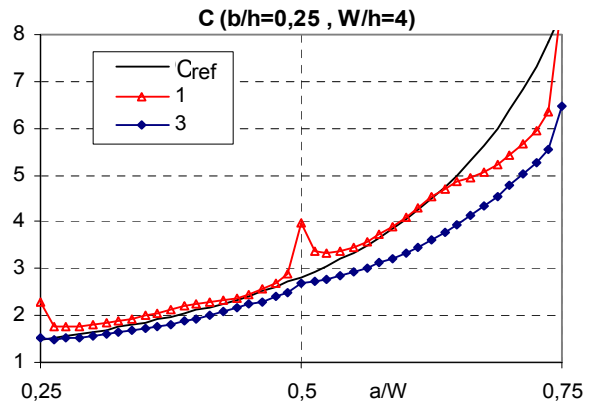
**Fig.6.** Evolución de  $C$  en función del tamaño de grieta.  $W/h= 4$ . Subdivisión mínima de integración en extremo de grieta.

En las Figs. 8 y 9 se muestran los valores de  $C$  y su error considerando la subdivisión propuesta de integración numérica del elemento de extremo de grieta. En este caso, se ha considerado una integración en 1 y 3

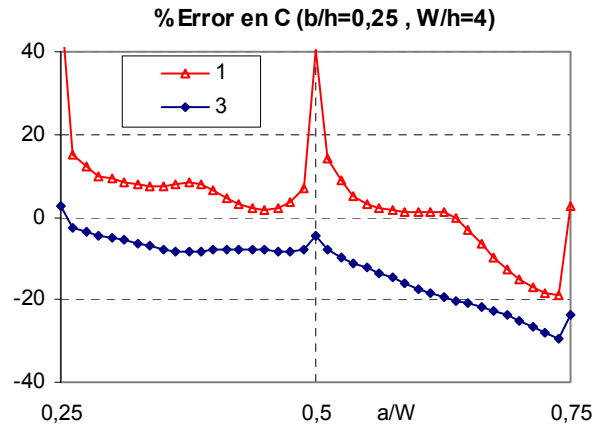
puntos de Gauss para las regiones triangulares de integración (manteniendo un número total de puntos de integración en el elemento de extremo de grieta similar al caso anterior). El resultado obtenido presenta oscilaciones de la precisión menores que en el caso anterior, siendo por lo tanto la solución más independiente de la posición relativa del extremo de grieta dentro del elemento.



**Fig.7.** Error en  $C$  en función del tamaño de grieta.  $W/h= 4$ . Subdivisión mínima de integración en extremo de grieta.

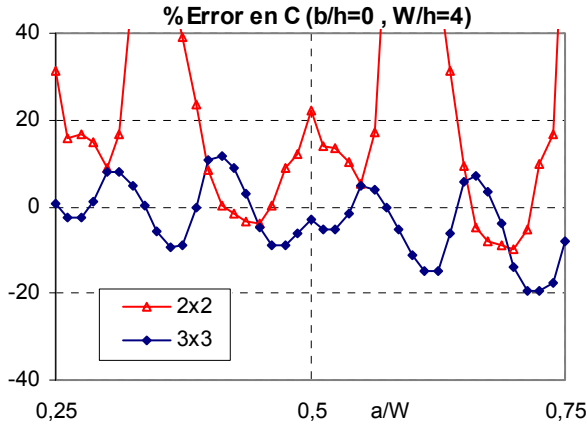


**Fig. 8.** Evolución de  $C$  en función del tamaño de grieta.  $W/h= 4$ . Subdominios de integración triangulares propuestos.

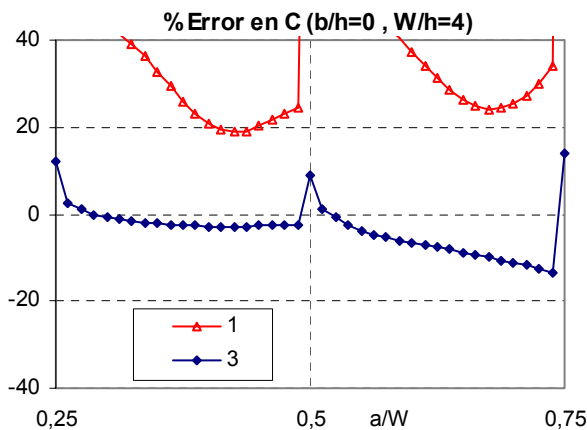


**Fig.9.** Error en  $C$  en función del tamaño de grieta.  $W/h= 4$ . Subdominios de integración triangulares propuestos.

Para relaciones  $b/h$  diferentes de las mostradas, el resultado obtenido sigue las mismas pautas. En las Figs. 10 y 11 se muestra el error en  $C$  para los dos tipos de subdivisiones de integración planteadas, considerando ahora  $b = 0$  (grieta en el contorno entre elementos).



**Fig. 10.** Error en  $C$  en función del tamaño de grieta.  $W/h=4$ . Subdivisión mínima de integración en extremo de grieta.



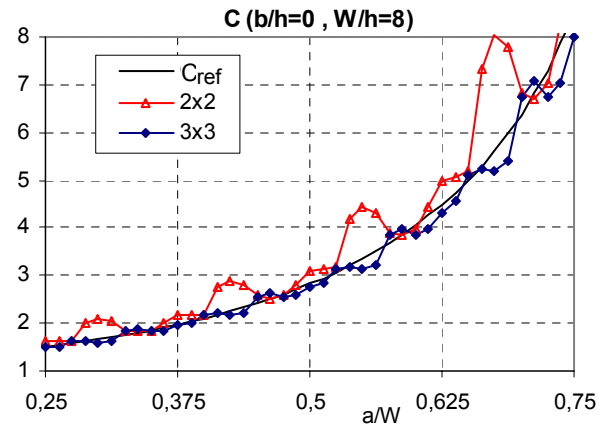
**Fig. 11.** Error en  $C$  en función del tamaño de grieta.  $W/h=4$ . Subdominios de integración triangulares propuestos.

En cuanto a la influencia del número de puntos de integración numérica en los subdominios triangulares de integración, en la Fig. 11 puede observarse que un solo punto de integración no es adecuado para tener en cuenta la aproximación de XFEM definida en (4).

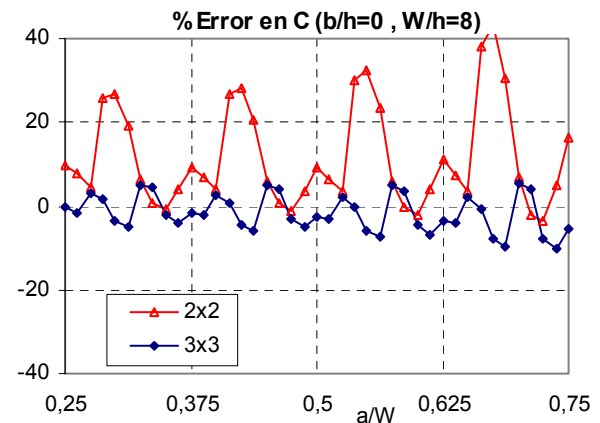
Como puede observarse en las figuras 9 y 11, el error inducido en la extracción del FIT aumenta considerablemente a medida que el tamaño de grieta se acerca a la relación  $a = 0.75W$ . Este hecho es debido a dos factores, asociados al tamaño de elemento utilizado. Por una parte cuando  $a = 0.75W$ , sólo permanece un único elemento bilineal sin grieta en la sección transversal, que es incapaz de representar correctamente el campo de tensiones existente. Por otra parte, la extracción del FIT mediante el método EDI es defectuosa ya que la integral correspondiente se realiza

en un único elemento por delante del frente de grieta, y los resultados de elementos finitos en esta zona tan próxima al extremo de grieta son poco precisos. Con objeto de comprobar la mejora de la solución con el tamaño de elemento, se ha resuelto el mismo problema considerando una relación  $W/h = 8$  (es decir, reduciendo a la mitad el tamaño de elemento). En las Figs. 12 a 15 se representa el valor de  $C$  calculado mediante elementos finitos y el error con respecto a la solución de referencia.

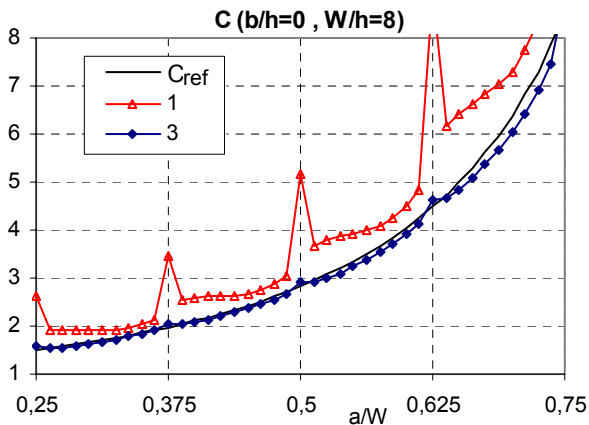
Cuando se utiliza la subdivisión de integración mínima en extremo de grieta, se siguen observando variaciones importantes de la solución del FIT en función de la posición del extremo de grieta en relación a los puntos de integración. Sin embargo, cuando se utiliza el método de subdivisión de integración propuesto, el error inducido en el FIT sigue siendo bastante independiente de la posición del extremo de grieta y, debido al mayor refinamiento, la variación del error con el tamaño de grieta es inferior al caso anteriormente analizado.



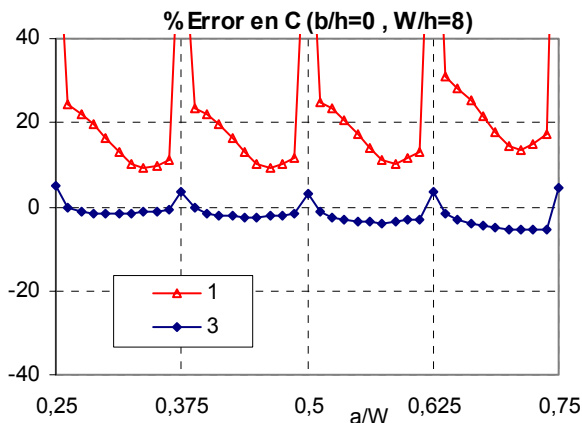
**Fig. 12.** Evolución de  $C$  en función del tamaño de grieta.  $W/h=8$ . Subdivisión mínima de integración en extremo de grieta.



**Fig. 13.** Error en  $C$  en función del tamaño de grieta.  $W/h=8$ . Subdivisión mínima de integración en extremo de grieta.



**Fig. 14.** Evolución de C en función del tamaño de grieta. W/h= 8. Subdominios de integración triangulares propuestos.



**Fig. 15.** Error en C en función del tamaño de grieta. W/h= 8. Subdominios de integración triangulares propuestos.

## 5. CONCLUSIONES

La implementación del XFEM exige la integración numérica en los elementos afectados por la grieta mediante subdominios. Se ha analizado la influencia de la definición de estos subdominios para casos bidimensionales utilizando integración numérica de Gauss. Se propone una definición de subdominios triangulares con vértice orientado al extremo de grieta que mejora la estimación del FIT y que presenta un error prácticamente independiente de la posición del extremo de la grieta. El error inducido en el FIT está por lo tanto poco afectado por los errores locales de modelado del extremo de grieta y es atribuible fundamentalmente al error de discretización de elementos finitos. Es de esperar que esta característica posibilite la extensión de técnicas convencionales de estimación del error de discretización en el FIT al caso del XFEM.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al Ministerio de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido a través del proyecto DPI2001-2400-C02-02.

## REFERENCIAS

- [1] Giner, E., Fuenmayor, F.J., Ródenas, J.J., Besa, A.J., An error estimator for the finite element evaluation of the stress intensity factor in fracture mechanics, Fifth World Congress on Computational Mechanics, Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics, Eds. H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner, Viena, Austria, (2002).
- [2] Giner, E., Fuenmayor, F.J., Tarancón, J.E., An improvement of the EDI method in linear elastic fracture mechanics by means of an a posteriori error estimator in G, Int. J. Numer. Meth. Engng, 59 -4, p. 533-558 (2004).
- [3] Rashid, M.M., The arbitrary local mesh replacement method: An alternative to remeshing for crack propagation analysis, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 154, 133-150 (1998).
- [4] Bouchard, P.O., Bay, F., Chastel, Y. Toven, I., Crack propagation using an advanced remeshing technique, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 189, 723-742 (2000).
- [5] Belytschko, T., Black, T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, Int. J. Numer. Meth. Engng, 45, 601-620 (1999).
- [6] Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T., A finite element method for crack growth without remeshing, Int. J. Numer. Meth. Engng, 46, 131-150 (1999).
- [7] Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N., Belytschko, T., (2000), Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method, Int. J. Numer. Meth. Engng, 48, 1741-1760.
- [8] Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., Belytschko, T., Extended finite element method for three-dimensional crack modelling, Int. J. Numer. Meth. Engng, 48, 1549-1570 (2000).
- [9] Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T., An extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact, Comput. Meth Appl Mech Engrn, 190, 6825-6848 (2001).
- [10] Tada, H., Paris, P.C., Irwin, G.C. (eds.), The Stress Analysis of Cracks Handbook (2<sup>nd</sup> ed.). Paris Productions, Inc.: St. Luis, Missouri (1985).