

CÁLCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES GENERALIZADO EN PROBLEMAS DE CONTACTO COMPLETO CON DESLIZAMIENTO MEDIANTE UNA INTEGRAL DE CONTORNO INDEPENDIENTE DEL CAMINO

F.J. Fuenmayor, E. Giner, M. Tur y A. Vercher

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera, s/n, 46022 Valencia

Resumen. En problemas de fretting fatiga de contacto completo con deslizamiento global, el estado de tensiones en la zona del final del contacto, suponiendo comportamiento elástico de los materiales, puede ser singular. Para caracterizar este estado de tensiones se deben obtener dos parámetros: el orden de la singularidad y el factor de intensidad de tensiones generalizado (FITG). El primero se puede calcular analíticamente a partir de la geometría del punzón, las características de los materiales, el coeficiente de rozamiento y el sentido del deslizamiento. Es habitual obtener el FITG por procedimientos numéricos siendo la técnica de extrapolación de tensiones (a partir de resultados de elementos finitos) la más utilizada. En este trabajo se define una integral de contorno independiente del camino que permite obtener el FITG. Mediante este nuevo método, para la misma discretización, se calcula con mejor precisión el FITG. Además, se evita tener que realizar una discretización muy fina de la zona singular, ya que la integral de contorno puede ser aplicada a lo largo de caminos alejados de la zona dominada por la singularidad gracias a la propiedad de independencia del camino.

Abstract. In complete contact fretting problems under global sliding conditions, the stress state at the corner of the contact zone is singular (assuming elastic behaviour). This stress state is characterized by means of two parameters: the order of singularity and the generalized stress intensity factor (GSIF). The former can be analytically calculated provided the geometry of the indenter, material properties, friction coefficient and direction of sliding are known. The GSIF is usually obtained by means of numerical procedures. One of the most used is the application of the stress extrapolation technique in combination with a FE analysis. In this work, we define a path-independent contour integral which enables the GSIF calculation. Using this novel technique, a much more accurate estimation of the GSIF can be obtained for a given discretization. In addition, a refined mesh around the singular point is not needed, because the contour integral can be applied along paths far from the singularity dominated zone due to its path independence.

1. INTRODUCCIÓN

En ciertos componentes de máquinas, como uniones en ejes por interferencia o ejes acanalados, el análisis de la iniciación y crecimiento de grieta se puede realizar a través del cálculo del estado de tensiones que se genera en la zona cercana al contacto [1]. En estos componentes el contacto es completo, es decir, el tamaño del área de contacto es independiente de la carga normal.

Considerando comportamiento elástico del material, y dependiendo de la configuración, el estado de tensiones en los extremos de la zona de contacto puede ser singular. Normalmente se asume que en la zona más cercana al final del contacto, el término con mayor orden de singularidad dominará sobre el resto y el campo de tensiones vendrá dado por éste. Para caracterizar el campo singular se utilizan dos parámetros, que son el orden de la singularidad λ y el factor de intensidad de tensiones generalizado K^C (FITG). La zona del final del contacto puede presentar condiciones de adhesión o deslizamiento, y el estado del contacto puede ir variando durante un ciclo de carga. El

orden de la singularidad se puede calcular de forma analítica y depende de la geometría de los cuerpos en contacto, de los materiales y del coeficiente de rozamiento. En el caso de adhesión el problema se puede analizar como una entalla en V y para la condición de deslizamiento se puede utilizar la solución propuesta por Comninou [2] y Theocaris [3].

Para evaluar el FITG es necesario utilizar un método numérico como puede ser el método de los elementos finitos. Normalmente se utiliza una técnica de extrapolación de tensiones para calcular este parámetro. Sin embargo, el método de extrapolación de tensiones presenta diversos inconvenientes, como la necesidad de su aplicación en una zona próxima al punto singular, en la que la solución de EF tiende a ser de peor calidad que en zonas alejadas del punto singular. Además, la elección de los puntos de ajuste al campo singular necesita de la intervención del usuario.

En este trabajo se propone una integral de contorno independiente del camino para el cálculo del FITG en problemas de contacto completo en condiciones de deslizamiento global. De esta forma, el cálculo del

FITG se realiza de forma indirecta a partir de principios energéticos de la elastoestática. La integración se extiende en una zona que rodea al punto singular, evitando el entorno próximo a la esquina en el que la solución de EF presenta un mayor error. Con el fin de verificar numéricamente las soluciones aportadas por la integral propuesta, en el trabajo se presenta una comparación de los resultados obtenidos con la técnica de extrapolación de tensiones para un ejemplo numérico.

2. CAMPO SINGULAR

El problema de contacto plano con deslizamiento fue analizado en primer lugar por Comninou [2] y Gdoutos y Theocaris [3]. Mugađu *et al.* [4], basándose en las soluciones anteriores analizaron los campos singulares que aparecen en un ensayo de fretting fatiga. La Fig. 1 muestra la zona del final de contacto entre un indentador plano y un semi-plano infinito. El indentador forma un ángulo ψ con la superficie libre del semiplano y se encuentra en condiciones de deslizamiento global. El campo de tensiones para puntos cerca de $r=0$ es, normalmente, singular. Dependiendo del valor del coeficiente de rozamiento en el contacto, f , del sentido de deslizamiento, de la geometría del indentador (ángulo ψ) y del material, se obtiene un campo de tensiones y un orden de la singularidad λ diferente.

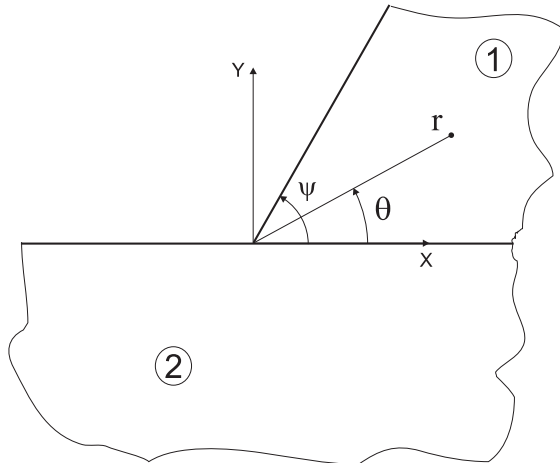


Fig. 1. Esquema del problema de contacto completo.

Si se supone que los cuerpos en contacto son del mismo material, elástico e isótropo, con módulo de Young E , coeficiente de Poisson ν y módulo de rigidez a cizalladura μ , el problema se resuelve encontrando la función de Airy que cumpla las condiciones de contorno en cada uno de los dos cuerpos en contacto. El campo de desplazamientos se puede escribir como:

$$\{u^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} u_r^{(i)} \\ u_\theta^{(i)} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} K_j^C r^{\lambda_j} \{\Psi_j^{(i)}\} \quad (1)$$

y el campo de tensiones

$$\{\sigma^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr}^{(i)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(i)} \\ \sigma_{r\theta}^{(i)} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} K_j^C \lambda_j r^{\lambda_j-1} \{\Phi_j^{(i)}\} \quad (2)$$

donde $^{(i)}$ denota el sólido en cuestión ($^{(1)}$ para el indentador y $^{(2)}$ para el semiplano) y j es cada uno de los modos correspondientes a cada uno de los autovalores. A partir del vector de tensiones y definiendo un vector normal \mathbf{n} es inmediato el cálculo del vector de tracciones $\sigma_{ij}n_i$. El cálculo de los autovalores (λ_j) y autovectores ($\Psi_j^{(i)}$ y $\Phi_j^{(i)}$) del problema se puede encontrar en [4]. Los autovalores λ_j son las raíces de la siguiente ecuación característica:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \cos(\lambda\pi)(\sin^2 \lambda\psi - \lambda^2 \sin^2 \psi) + \\ & + 0.5 \sin(\lambda\pi)(\sin 2\lambda\psi + \lambda \sin 2\psi) + \\ & + f\lambda(1 + \lambda) \sin(\lambda\pi) \sin^2 \psi = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

3. INTEGRAL INDEPENDIENTE DEL CAMINO

En la ausencia de fuerzas volumétricas presentes en los sólidos en contacto, el principio de reciprocidad de Maxwell-Betti establece que:

$$\oint_{(i)} \left(\sigma_{jk}^{(i)} u_k^{(i)} - \bar{\sigma}_{jk}^{(i)} u_k^{(i)} \right) n_j ds = 0 \quad (4)$$

para una integral cerrada en cada uno de los sólidos $^{(i)}$ y donde los campos de desplazamiento $u^{(i)}$ y $\bar{u}^{(i)}$ son campos cualesquiera que cumplen las ecuaciones de equilibrio. Los campos de tensiones $\sigma^{(i)}$ y $\bar{\sigma}^{(i)}$ son los asociados a $u^{(i)}$ y $\bar{u}^{(i)}$, respectivamente. Combinando la aplicación del principio de reciprocidad a ambos sólidos en una única ecuación se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^2 \oint_{(i)} \left(\sigma_{jk}^{(i)} u_k^{(i)} - \bar{\sigma}_{jk}^{(i)} u_k^{(i)} \right) n_j ds = 0 \quad (5)$$

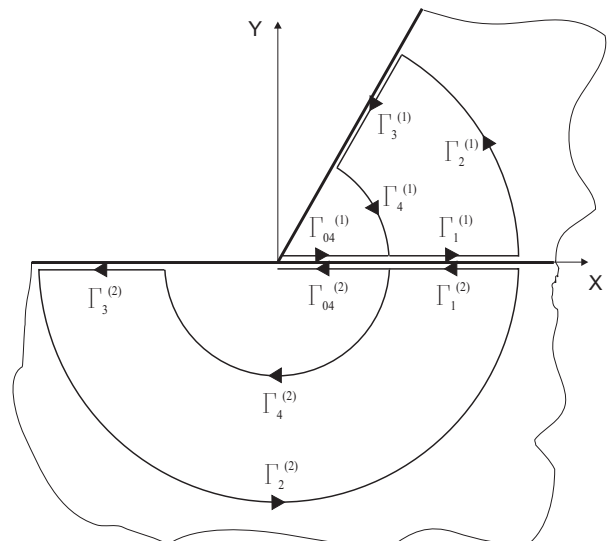


Fig. 2. Caminos de integración.

Si se realiza la integral correspondiente a los cuerpos 1 y 2 a lo largo de los caminos definidos en la Fig. 2 se tiene que las integrales anteriores se evaluarán en los tramos $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$ y $\Gamma_4^{(1)}$, para el cuerpo 1, y $\Gamma_1^{(2)}$, $\Gamma_2^{(2)}$, $\Gamma_3^{(2)}$ y $\Gamma_4^{(2)}$, para el cuerpo 2. Dado que en la superficie libre de los cuerpos en contacto no hay aplicada ninguna carga, las integrales correspondientes a los tramos $\Gamma_3^{(1)}$ y $\Gamma_3^{(2)}$ serán nulas si tanto $u^{(i)}$ como $\bar{u}^{(i)}$ cumplen estas condiciones de contorno. Si se define la unión de los tramos 2 de los dos cuerpos como $\Gamma_2 \equiv \Gamma_2^{(1)} \cup \Gamma_2^{(2)}$ y la de los dos tramos 4 como $\Gamma_4 \equiv \Gamma_4^{(1)} \cup \Gamma_4^{(2)}$, la ecuación (5) queda:

$$\oint_{(1)} + \oint_{(2)} = \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_1^{(1)}} + \int_{\Gamma_1^{(2)}} = 0 \quad (6)$$

A la ecuación anterior se suman y restan las integrales evaluadas en el tramo del contacto que va del final del contacto hasta el camino de integración Γ_4 (la integral se realiza en el sentido indicado en la Fig. 2), de forma que operando se obtiene que:

$$\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_1^{(1)}} + \int_{\Gamma_1^{(2)}} + \int_{\Gamma_{04}^{(1)}} + \int_{\Gamma_{04}^{(2)}} = \int_{-\Gamma_4} + \int_{\Gamma_{04}^{(1)}} + \int_{\Gamma_{04}^{(2)}} \quad (7)$$

donde se ha definido el camino $-\Gamma_4$ como el camino Γ_4 integrado en sentido contrario al mostrado en la Fig. 2. Si se definen los caminos de integración Γ_{C2} y Γ_{C4} que van a lo largo de la línea de contacto, desde el extremo del contacto (punto singular) hasta intersectar con los caminos Γ_2 y Γ_4 respectivamente, a partir de la expresión (7) se obtiene que:

$$\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_{C2}^{(1)}} - \int_{\Gamma_{C2}^{(2)}} = \int_{-\Gamma_4} + \int_{\Gamma_{C4}^{(1)}} - \int_{\Gamma_{C4}^{(2)}} \quad (8)$$

Es decir, se demuestra que se puede definir una integral cuyo valor no depende del camino de integración. Esta integral independiente del camino tiene en general la siguiente forma:

$$I_{\Gamma^*} = \int_{\Gamma^*} (\sigma_{jk} \bar{u}_k - \bar{\sigma}_{jk} u_k) n_j ds + \int_{\Gamma_C^*} (\sigma_{jk}^{(1)} \bar{u}_k^{(1)} - \bar{\sigma}_{jk}^{(1)} u_k^{(1)}) n_j ds - \int_{\Gamma_C^*} (\sigma_{jk}^{(2)} \bar{u}_k^{(2)} - \bar{\sigma}_{jk}^{(2)} u_k^{(2)}) n_j ds \quad (9)$$

donde se ha definido (ver Fig. 3) un camino cualquiera Γ^* y el camino Γ_C^* que va a lo largo de la línea de contacto, desde el punto final de contacto (punto singular) hasta intersectar con el camino anterior.

4. PROPIEDADES DE ORTOGONALIDAD

A continuación se va a obtener un campo auxiliar que permita extraer el FITG asociado al modo i , K_i^C . La evaluación de las integrales a lo largo del camino Γ_C^* en la expresión (9) puede ser complicada, ya que la tensión

es singular en la zona final del contacto. Por tanto, se impondrá como condición adicional que el campo auxiliar anule el integrando de estas integrales.

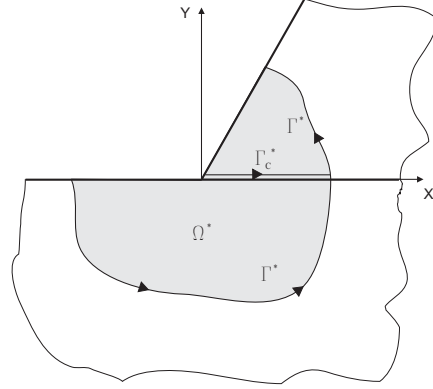


Fig. 3. Camino de integración arbitrario.

Los desplazamientos del campo auxiliar de extracción se tomarán como:

$$\{u_E\} = r^{-\lambda_E} \{\Psi_E^{(i)}\} \quad (10)$$

con componentes en polares u_r , u_θ definidas de la forma siguiente [4]:

$$\{\Psi_E^{(i)}\} = \frac{1}{2\mu} \left\{ \begin{aligned} &-(\lambda+1)(a^{(i)}s_+ + b^{(i)}c_+) + (\lambda+1-m)(c^{(i)}s_- - d^{(i)}c_-) \\ &(\lambda+1)(-a^{(i)}c_+ + b^{(i)}s_+) + (\lambda-1+m)(c^{(i)}c_- + d^{(i)}s_-) \end{aligned} \right\}$$

expresión en la que se ha definido

$$s_+ = \sin((\lambda+1)\theta) \quad s_- = \sin((\lambda-1)\theta) \\ c_+ = \cos((\lambda+1)\theta) \quad c_- = \cos((\lambda-1)\theta)$$

siendo para el campo de extracción $\lambda = -\lambda_E$. Además, $m = 4/(1+\nu)$ en problemas de tensión plana y $m = 4(1-\nu)$ en deformación plana. El correspondiente campo de tensiones de extracción será:

$$\{\sigma_E^{(i)}\} = -\lambda_E r^{-\lambda_E-1} \{\Phi_E^{(i)}\} \quad (11)$$

cuyas componentes en coordenadas polares σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ definen, por este orden, el vector:

$$\{\Phi_E^{(i)}\} = \left\{ \begin{aligned} &(\lambda+1)(-a^{(i)}s_+ - b^{(i)}c_+) + (\lambda-3)(c^{(i)}s_- - d^{(i)}c_-) \\ &(\lambda+1)(a^{(i)}s_+ + b^{(i)}c_+ + c^{(i)}s_- + d^{(i)}c_-) \\ &(\lambda+1)(-a^{(i)}c_+ + b^{(i)}s_+) + (1-\lambda)(-c^{(i)}c_- + d^{(i)}s_-) \end{aligned} \right\}$$

El vector de tracciones se define a partir del vector de tensiones y se expresa como:

$$\{T_E^{(i)}\} = -\lambda_E r^{-\lambda_E-1} \{\Xi_E^{(i)}\} \quad (12)$$

donde $\{\Xi_E^{(i)}\}$ son las funciones trigonométricas provenientes de realizar el producto $\sigma_{ij}n_i$. Para obtener los parámetros que definen el problema de extracción (coeficientes $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, y $d^{(i)}$) se tienen en cuenta las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} 1) \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, -\pi) = 0 \quad 2) \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, -\pi) = 0 \\ 3) \sigma_{r\theta}^{(1)}(r, \psi) = 0 \quad 4) \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \psi) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Además, para obtener la función de extracción, se añaden cuatro condiciones adicionales que anulan los integrales de las integrales a lo largo del camino Γ_C^* en la expresión (9):

$$\begin{aligned} 5) (u_\theta^{(1)}(r, 0) - u_\theta^{(2)}(r, 0)) - f(u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 0)) = 0 \\ 6) \sigma_{r\theta}^{(1)}(r, 0) = 0 \\ 7) \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, 0) = 0 \\ 8) \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, 0) - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Aplicando la transformada de Mellin se llega al siguiente problema de valores y vectores propios:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \\ c^{(1)} \\ d^{(1)} \\ a^{(2)} \\ b^{(2)} \\ c^{(2)} \\ d^{(2)} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (15)$$

donde,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} (\lambda+1)c(\lambda\pi) & (\lambda+1)s(\lambda\pi) & (1-\lambda)c(\lambda\pi) & (\lambda-1)s(\lambda\pi) \\ s(\lambda\pi) & -c(\lambda\pi) & -s(\lambda\pi) & -c(\lambda\pi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda+1)c_+\psi & -(\lambda+1)s_+\psi & (1-\lambda)c_-\psi & -(1-\lambda)s_-\psi \\ s_+\psi & c_+\psi & s_-\psi & c_-\psi \end{bmatrix} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} -(\lambda+1) & 0 & -(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda+1) & f(\lambda+1) & (\lambda-1+m) & f(\lambda+1-m) \end{bmatrix} \\ A_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ (\lambda+1) & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ (\lambda+1) & -f(\lambda+1) & (1-\lambda-m) & f(m-\lambda-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $s_+\psi = \sin((1+\lambda)\psi)$, $s_-\psi = \sin((1-\lambda)\psi)$ y análogamente para las funciones coseno. Para que el sistema tenga solución distinta de la trivial, el determinante de la matriz debe ser nulo. Se puede demostrar que si λ es un autovalor del problema original, $-\lambda$ es un autovalor del problema de extracción.

La expresión (9) es válida si se utiliza el campo solución y el campo de extracción definido anteriormente. Debido a las condiciones de contorno aplicadas en el campo de extracción, las integrales

realizadas en la zona de contacto se anulan (porque se anula su integrando). Con el fin de demostrar la propiedad de ortogonalidad, la integral (9) se aplica a un camino circular de radio ρ ,

$$I_{\Gamma_p}(u, u_E) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho^{\lambda_i - \lambda_E} K_i^C C_{i,E} \quad (16)$$

donde se ha tenido en cuenta que el camino es circular ($ds = \rho d\theta$) y se han definido las constantes $C_{i,E}$ que relacionan cada uno de los modos i con el modo de extracción E como:

$$C_{i,E} = \int_{-\pi}^{\psi} (\lambda_i \{\Xi_i\}^T \{\Psi_E\} + \lambda_E \{\Xi_E\}^T \{\Psi_i\}) d\theta \quad (17)$$

Nótese que esta integral debe descomponerse en dos tramos (uno para cada sólido), ya que las funciones trigonométricas del integrando varían de un sólido a otro.

Como la integral de la ecuación (16) no depende del camino, no puede depender de ρ . Por lo tanto, para todo modo i tal que $\lambda_i \neq \lambda_E$, se cumple que $C_{i,E} = 0$ (propiedad de ortogonalidad). Únicamente cuando el modo de extracción es tal que $\lambda_E = \lambda_i$, entonces $C_{i,E} \neq 0$.

5. MÉTODO DE EXTRACCIÓN

Si el campo exacto de desplazamientos u_{Ex} y tensiones σ_{Ex} del problema inicial vienen dados por las expresiones (1) y (2) (el campo de tracciones exactas sería T_{Ex}), y se define el campo de extracción definido en el apartado anterior para el valor de λ_E (que corresponde con el autovalor del modo n que se desea calcular), teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad, la ecuación (16) queda:

$$I_{\Gamma_p}(u_{Ex}, u_E) = K_n^C C_{n,E} \quad (18)$$

y por tanto el factor de intensidad de tensiones generalizado asociado al modo n es calculable a través de la expresión:

$$K_n^C = \frac{1}{C_{n,E}} I_{\Gamma^*}(u_{Ex}, u_E) = \frac{1}{C_{n,E}} \int_{\Gamma^*} (\{T_{Ex}\}^T \{u_E\} - \{T_E\}^T \{u_{Ex}\}) ds \quad (19)$$

donde se ha tenido en cuenta la independencia del camino de la integral en (9), siendo Γ^* cualquier camino arbitrario que comience en $\theta = -\pi$ y termine en $\theta = \psi$, (ver Fig. 3).

En la práctica, es habitual estar interesados en el cálculo del FITG asociado al primer autovalor positivo, λ_1 , ya que da lugar a tensiones con mayor orden de singularidad que dominan en las proximidades del extremo del contacto (punto singular). Para ello, (19) se

particulariza al caso $n = 1$. Obviamente, el método es aplicable al cálculo de cualquier otro FITG K_n^C .

Utilizando un método numérico para el análisis de un problema concreto, tal y como el método de los elementos finitos, es posible aproximar los campos exactos por los correspondientes campos de EF. La estimación del FITG a partir de los campos de EF estará basada en la ec. (19):

$$K_n^C = \frac{1}{C_{n,E}} \int_{\Gamma} \left(\{T_{EF}\}^T \{u_E\} - \{T_E\}^T \{u_{EF}\} \right) ds \quad (20)$$

6. VERIFICACIÓN NUMÉRICA

6.1. Descripción del modelo numérico

Se ha verificado la bondad de la metodología propuesta a través de su aplicación al análisis mediante EF del modelo probeta-indentador esquematizado en la Fig. 4.

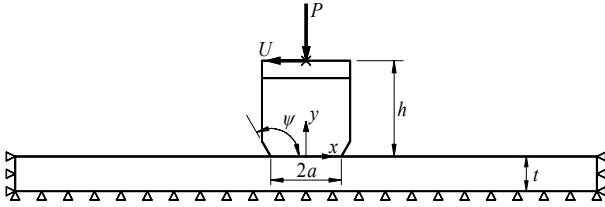


Fig. 4. Modelo probeta-indentador utilizado en la verificación numérica.

El ángulo ψ es 121° , el coeficiente de rozamiento $f = 0.6$, el material de probeta e indentador es acero (se supone con comportamiento elástico), con $E = 208$ GPa y $\nu = 0.3$. Estos datos se aproximan al problema real de un eje acanalado. El semiespesor de la probeta es $t = 5.0$ mm, la anchura del indentador en la base de contacto es $2a = 10.1$ mm y la altura entre la base de contacto y el punto de aplicación de las acciones es $h = 14.0$ mm. La profundidad es 10.0 mm y se ha supuesto un estado de deformación plana.

Las acciones sobre el indentador son aplicadas en dos pasos de carga: en el primero, se incrementa la carga P sobre el indentador hasta alcanzar el valor $P_{\max} = 17.65$ kN. En el segundo paso de carga, se aplica un desplazamiento impuesto al indentador hacia la izquierda de valor máximo $|U|_{\max} = 60 \mu\text{m}$, bajo la acción mantenida de P_{\max} . Notar que se ha optado por imponer un desplazamiento U al indentador (control en desplazamientos) para garantizar la convergencia numérica del problema en el momento en el que se alcance el deslizamiento global del indentador. Asimismo, se ha restringido la rotación de la parte superior del indentador (modelada mediante elementos rígidos).

La Fig. 5 muestra la evolución de las cargas aplicadas a lo largo de los dos pasos de carga. Notar que el primer paso de carga se subdividió en 4 incrementos, mientras

que en el segundo se utilizaron 20 incrementos. Durante el segundo paso de carga, las condiciones de contacto evolucionan del siguiente modo: adhesión total, deslizamiento parcial y deslizamiento global. El estado de deslizamiento global hacia la izquierda se alcanza en el incremento 16 y prosigue hasta el final del paso de carga. En este trabajo se analizará únicamente el valor del FITG en la esquina izquierda y para el incremento 18 señalado en la Fig. 5.

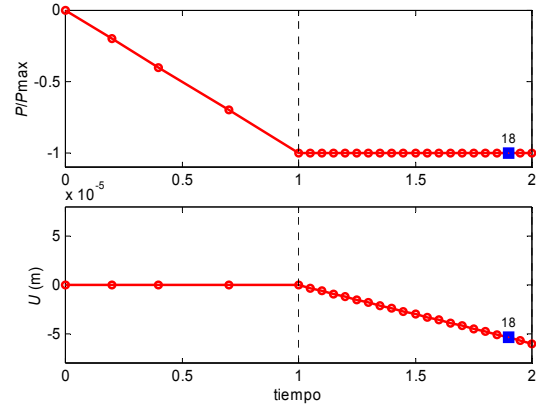


Fig. 5. Evolución de las cargas aplicadas a lo largo de los dos pasos de carga.

El modelo de EF está constituido básicamente por elementos cuadriláteros cuadráticos de 8 nodos, aunque se han utilizado también elementos triangulares cuadráticos de 6 nodos en el mallado de la porción del indentador junto al extremo del contacto (ver Fig. 6). El tamaño de elemento en las proximidades del extremo del contacto es $\approx 10^{-3}a$.

6.2. Extracción del FITG

Al tratarse de un deslizamiento global hacia la izquierda (hacia fuera de la zona de contacto), f debe tomarse como -0.6 en la ecuación característica (3), resultando como primer autovalor positivo $\lambda_1 = 0.46908$. Para extraer el valor del FITG K_1^C asociado a este modo se debe utilizar el campo de extracción definido en la Sección 4, tomando $\lambda_E = \lambda_1$.

Con el fin de comparar los valores del FITG obtenidos a través de la integral de contorno con un valor de referencia, se utilizó la técnica de extrapolación de tensiones. Dado el elevado refinamiento de la malla utilizada en el modelo, la técnica de extrapolación de tensiones puede proporcionar un resultado de referencia aceptable. Para ello, se llevó a cabo el ajuste de las tensiones $\sigma_{\theta\theta}$ en el plano de contacto junto a la esquina izquierda despejando de la siguiente expresión y extrapolando para $r \rightarrow 0$:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, 0) = K_1^C r^{\lambda_1 - 1} (0.66904) \quad (21)$$

Para la aplicación de la integral independiente del camino se utilizaron 5 caminos diferentes representados en las Fig. 6 y 7. Notar que los caminos 2, 3 y 4 son

circulares y que los caminos 1 y 5 contienen lados rectos. Los caminos 1 y 2 se pueden considerar en el interior de la zona dominada por la singularidad, mientras que los caminos 3, 4 y 5 atraviesan zonas en las que la influencia de otras componentes no singulares del campo puede ser importante (el contorno inferior del camino 5 recorre el contorno del modelo analizado).

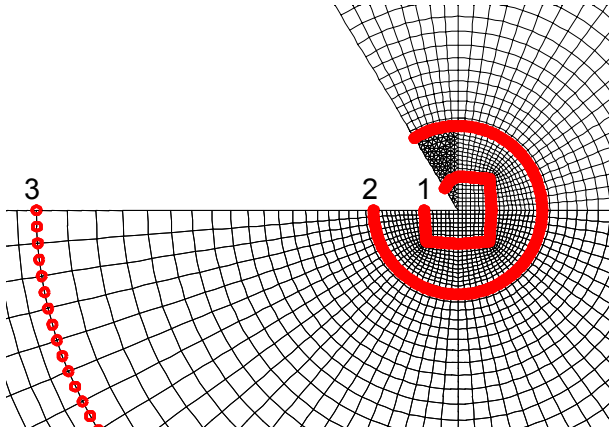


Fig. 6. Detalle de la malla en el entorno del extremo de la zona de contacto. Se muestran los caminos 1 y 2 y la posición relativa con respecto al camino 3.

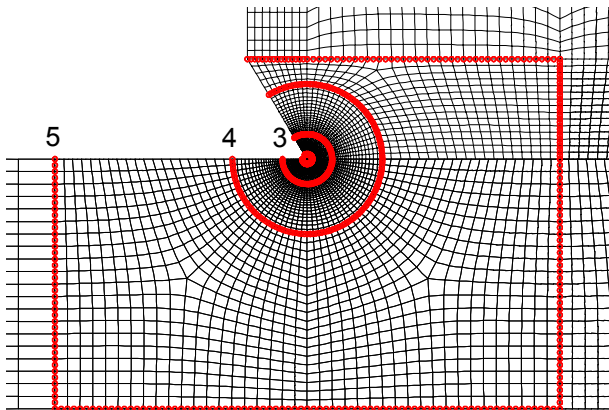


Fig. 7. Posición de los caminos 3, 4 y 5.

Los caminos recorren los lados de los elementos. Para la evaluación de la integral de contorno (20) se utilizaron los valores nodales del campo de desplazamientos y los valores promediados en nodos de los campos de tensiones. Se utilizó una integración numérica a lo largo de cada lado de elemento utilizando 3 puntos de Gauss (se comprobó que un número mayor de puntos de Gauss proporciona prácticamente los mismos resultados).

Para la obtención de K_1^C según (20) es necesario calcular la integral $C_{1,E}$ de acuerdo con su definición (17), resultando $C_{1,E} = -4.17435 \cdot 10^{-11}$.

La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos para cada uno de los caminos, así como la comparación con el valor de referencia. Se verifica la gran concordancia entre los valores estimados a través de la integral de contorno y el valor de referencia obtenido mediante

Tabla 1. Resultados obtenidos con la integral propuesta.

Camino	K_1^C vía integral (20) (Pa·m ^{1-λ₁})	K_1^C vía extrap. tens. (Pa·m ^{1-λ₁})
1	$-1.10646 \cdot 10^7$	$-1.09728 \cdot 10^7$
2	$-1.10462 \cdot 10^7$	
3	$-1.10375 \cdot 10^7$	
4	$-1.10357 \cdot 10^7$	
5	$-1.10347 \cdot 10^7$	

extrapolación. Además, se observa la gran independencia del valor de K_1^C con respecto al camino tomado. Notar que el valor asociado al camino 1 es ligeramente diferente al obtenido con otros caminos, posiblemente debido a la peor calidad de la solución de EF en la proximidad del punto singular. En cualquier caso, queda patente la bondad del método propuesto, ya que permite obtener el FITG incluso en caminos muy alejados del punto singular y por tanto, sin necesidad de utilizar una malla refinada.

7. CONCLUSIONES

Se ha propuesto una integral independiente del camino para obtener los FITG asociados a cada autovalor de un problema de contacto completo con deslizamiento global. La integral se basa en el principio de reciprocidad de Maxwell-Betti. Se ha propuesto la utilización de un campo de extracción que evita la evaluación de integrales de contorno en caminos que parten desde el extremo del contacto (cuya evaluación numérica es poco precisa), obteniendo una integral de contorno que puede ser calculada en zonas alejadas de la singularidad, con gran precisión y sin necesidad de utilizar mallas refinadas. El método se ha aplicado a un modelo numérico de EF obteniendo excelentes resultados.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al Ministerio de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido a través del proyecto DPI2001-2400-C02-02.

REFERENCIAS

- [1] T. Hattori, M. Nakamura, T. Watanabe, "Simulation of fretting-fatigue life by using stress-singularity parameters and fracture mechanics", *Tribology International*, 36, 87-97 (2003).
- [2] M. Comninou, "Stress singularity at a sharp edge in contact problems with friction", *J Appl Math and Physics (ZAMP)*, 27, 493-499 (1976).
- [3] E.E. Gdoutos, P.S. Theocaris, "Stress concentration at the apex of a plane indenter acting on an elastic half-plane", *J Appl Mech*, 42, 688-692 (1975).
- [4] A. Mugadu, D.A. Hills, L. Limmer, "An asymptotic approach to crack initiation in fretting fatigue of complete contacts", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50-3, 531-547, (2001).