

RESOLUCION DE PROBLEMAS DE GRIETAS 3-D EN MATERIALES TRANSVERSALMENTE ISOTROPOS MEDIANTE EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

M. Solís, M. P. Ariza y J. Domínguez

Grupo de Estructuras, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092, Sevilla, España

Resumen. En este artículo se presentan una serie de resultados de problemas tridimensionales de grietas inmersas en medios transversalmente isotrópos, bajo cargas estáticas y dinámicas (armónicas). Estos resultados han sido obtenidos utilizando una formulación mixta del Método de los Elementos de Contorno (MEC), y muestran la robustez y eficiencia de esta técnica. Con esta formulación se consigue que solo sea necesario discretizar la superficie del contorno externo del problema y la superficie de la grieta. Los núcleos hipersingulares y fuertemente singulares que aparecen en la formulación son regularizados de forma analítica y general (antes de cualquier discretización). Se emplean elementos cuadráticos de 6 y 9 nodos, siendo del tipo $\frac{1}{4}$ los situados en el frente de grieta. Los Factores de Intensidad de Tensiones (FIT) se obtienen a partir del desplazamiento de apertura de grieta (DAG) de los nodos a $\frac{1}{4}$. Los resultados obtenidos presentan un buen acuerdo con los obtenidos por otros autores, cuando éstos existen.

Abstract. Results of 3-D cracks in transversely isotropic bodies, under static and time harmonic dynamic loading are presented in this paper. These results show the robustness and efficiency of a mixed Boundary Element approach. With this approach, only the external boundaries surfaces and the crack surface need to be discretized. Hypersingular and strongly singular kernels appearing in the formulation are regularized analytically prior to any discretization. Quadratic elements of 6 or 9 nodes are used for the discretization. Stress Intensity Factors are computed from the crack opening displacements at quarter-point nodes. The results obtained are in good agreement with other results, when they exist.

1. INTRODUCCION

El Método de los Elementos de Contorno (MEC) ha sido considerado tradicionalmente como un método numérico especialmente adecuado para resolver problemas de Mecánica de la Fractura, ya que solo es necesario discretizar el contorno del problema (superficies en el caso tridimensional).

Cuando se utiliza la formulación clásica del MEC, debido a la degeneración geométrica que se produce en la superficie de la grieta, se hace necesario trabajar con multidominios o aplicar condiciones de simetría en el plano de la grieta, en el caso en que esto sea posible.

Con la formulación mixta de este método solo es necesario discretizar la superficie de la grieta y el contorno externo. Esto se consigue mediante el empleo de la ecuación integral de contorno (EIC) en desplazamientos para el contorno externo del problema, y la EIC en tracciones en la superficie de la grieta.

El principal inconveniente del empleo de la EIC en tracciones es la integración de los núcleos hipersingulares y fuertemente singulares (orden r^{-3} y r^{-2} respectivamente) que aparecen en la formulación. Para solventar esta dificultad, se utiliza el proceso de regularización propuesto por Domínguez *et al.* [1]. Esta

regularización es previa a cualquier discretización, y transforma las integrales hipersingulares y fuertemente singulares en integrales de línea y de superficie que son, a lo sumo, débilmente singulares y pueden ser evaluadas numéricamente sin dificultad. Esta formulación ha sido desarrollada por Ariza y Domínguez [2]-[3] para materiales transversalmente isotrópos tanto en estática como en dinámica.

Para realizar el procedimiento de integración de forma más eficiente, en este trabajo se han considerado dos procedimientos alternativos: la transformación de coordenadas propuesta por Telles [4] y una aplicación de la técnica de subdivisiones. Se han obtenido mejores resultados y el método resulta más robusto al utilizar la transformación de Telles.

En este artículo se analizan problemas estáticos y dinámicos de tipo armónico. Los desarrollos que siguen se llevarán a cabo para el caso general de frecuencia ω , siendo el problema estático obtenido como situación particular para $\omega=0$.

Existe un número muy reducido de problemas de mecánica de la fractura 3-D resueltas en casos de materiales no isotrópos y geometría diversa. Por ello, pueden resultar de gran utilidad resultados aquí definidos para problemas estáticos y dinámicos.

2. FORMULACIÓN

La EIC en desplazamientos, para un punto interno y de un cuerpo Ω , de contorno Γ , bajo carga armónica se puede escribir como

$$u_l(y, \omega) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(x, y, \omega) \cdot u_k(x, \omega) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^*(x, y, \omega) \cdot p_k(x, \omega) \cdot d\Gamma = 0 \quad (1)$$

para $l, k = 1, 2, 3$, donde u_k y p_k son la componente k del desplazamiento y las tracciones, respectivamente, ω es la frecuencia, y u_{lk}^* , p_{lk}^* son los campos de desplazamientos y tracciones de la solución fundamental armónica, elástica y tridimensional para materiales transversalmente isotrópicos.

Las tracciones en el punto y asociadas a una superficie con normal $N(y)$ se obtienen mediante el cálculo de las deformaciones a partir de las derivadas de los desplazamientos, sustitución en la relación tensión-deformación del material y proyección del tensor de tensiones sobre $N(y)$.

Realizando este proceso se obtiene la EIC en tracciones para un punto interno y :

$$p_l(y, \omega) + \int_{\Gamma} s_{lmk}^*(x, y, \omega) \cdot N_m(y) \cdot u_k(x, \omega) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} d_{lmk}^*(x, y, \omega) \cdot N_m(y) \cdot p_k(x, \omega) \cdot d\Gamma = 0 \quad (2)$$

donde s_{lmk}^* , d_{lmk}^* son combinaciones lineales de las derivadas de u_{lk}^* y p_{lk}^* , respectivamente.

Los núcleos de la solución fundamental se pueden descomponer en una parte regular (superíndice R), que tiende a cero con la frecuencia, y una parte singular (superíndice S) que se corresponde con la solución fundamental estática.

Así, la EIC en desplazamientos, una vez realizado el proceso habitual de llevar el punto y al contorno,

$$c_{lk}(y) \cdot u_l(y) + \int_{\Gamma} p_{lk}^{*S}(x, y) \cdot u_k(x, \omega) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^{*S}(x, y) \cdot p_k(x, \omega) \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} p_{lk}^{*R}(x, y, \omega) \cdot u_k(x, \omega) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^{*R}(x, y, \omega) \cdot p_k(x, \omega) \cdot d\Gamma = 0$$

podrá escribir como

$$c_{lk}(y) \cdot u_l(y) + \int_{\Gamma} p_{lk}^{*S}(x, y) \cdot u_k(x, \omega) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^{*S}(x, y) \cdot p_k(x, \omega) \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} p_{lk}^{*R}(x, y, \omega) \cdot u_k(x, \omega) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{lk}^{*R}(x, y, \omega) \cdot p_k(x, \omega) \cdot d\Gamma = 0 \quad (3)$$

donde c_{lk} son unos coeficientes que dependen de la forma de la superficie Γ (véase [5], por ejemplo). Las expresiones de u_{lk}^S y p_{lk}^S fueron obtenidas por Pan y Chou [6]. Los núcleos regulares u_{lk}^R , p_{lk}^R se obtienen restando la parte singular a la solución fundamental armónica para sólidos anisótropos obtenida por Wang y Achenbach [7].

La EIC en tracciones para un punto y del contorno, una vez llevado a cabo el proceso de regularización propuesto por Ariza y Domínguez [1], se puede escribir como

$$\frac{1}{2} p_l(y, \omega) + \int_{\Gamma} s_{lmk}^S N_m \{ [u_k(x, \omega) - u_k(y, \omega) - u_{k,h}(y, \omega)(x_h - y_h)] - d_{lmk}^S N_m [p_k(x, \omega) - p_k(y, \omega)] \} d\Gamma + [u_k(y, \omega) I_{lk} + u_{k,h}(y, \omega) J_{lhk} + p_k(y, \omega) K_{lk}] + \int_{\Gamma} \left\{ s_{lmk}^{*R}(x, y, \omega) \cdot N_m(y) \cdot u_k(x, \omega) - d_{lmk}^{*R}(x, y, \omega) \cdot N_m(y) \cdot p_k(x, \omega) \right\} d\Gamma \quad (4)$$

Las expresiones de d_{lmk}^* se obtienen a partir de p_{lk}^* haciendo tan solo un cambio de signo. Las expresiones de s_{lmk}^{*S} se pueden encontrar en [2].

El proceso de regularización consiste en restar y sumar dos términos de la serie de Taylor de los desplazamientos en el punto de colocación y un término de las tracciones. Las integrales hipersingulares y fuertemente singulares de los términos que se suman son regularizadas aplicando el teorema de Stokes, dando lugar a integrales de línea y de superficie que son regulares o débilmente singulares. Estas integrales aparecen en los términos I_{lk} , J_{lhk} , K_{lk} de la ec (4), cuyas expresiones se pueden encontrar en [2].

3. DISCRETIZACIÓN

El proceso de discretización se simplifica en gran medida con el empleo de la formulación mixta del MEC. Tan solo la superficie de la grieta y el contorno externo necesitan ser discretizados.

Como ya se ha puntado antes, la EIC en desplazamientos se aplica cuando el punto de colocación pertenece al contorno externo, mientras que la EIC en tracciones se aplica cuando pertenece a la grieta. Como consecuencia de esta técnica, las variables nodales son los desplazamientos y las tracciones en el contorno externo, y los DAG en la grieta, que son normalmente las variables que interesan en un problema de Mecánica de la Fractura.

La formulación planteada requiere el uso de elementos cuadráticos, ya sean cuadriláteros o triangulares. Además los puntos de colocación en la grieta no se

ubican en los nodos ($\xi_1, \xi_2=\pm 1$), sino en puntos cercanos a ellos, dentro del elemento ($\xi_1, \xi_2=\pm 0.75$). Así, para cada variable nodal en la grieta, se obtienen tantas ecuaciones como elementos contengan al nodo. Estas ecuaciones se suman para tener finalmente una sola ecuación por cada variable. Así la EIC en tracciones que se aplica es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} p_I(y, \omega) + \int_{\Gamma_0} s_{lmk}^S N_m \{ [u_k(x, \omega) - u_k(y, \omega) - \\ & u_{k,h}(y, \omega)(x_h - y_h)] - \\ & d_{lmk}^S N_m [p_k(x, \omega) - p_k(y, \omega)] \} d\Gamma + \\ & [u_k(y, \omega) I_{lk}^0 + u_{k,h}(y, \omega) J_{lh}^0 + p_k(y, \omega) K_{lk}^0] + \\ & \int_{\Gamma-\Gamma_0} \left\{ s_{lmk}^{*S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \cdot N_m(\mathbf{y}) \cdot u_k(\mathbf{x}, \omega) - \right. \\ & \left. d_{lmk}^{*S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \cdot N_m(\mathbf{y}) \cdot p_k(\mathbf{x}, \omega) \right\} d\Gamma \\ & \int_{\Gamma} \left\{ s_{lmk}^{*R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \cdot N_m(\mathbf{y}) \cdot u_k(\mathbf{x}, \omega) - \right. \\ & \left. d_{lmk}^{*R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \cdot N_m(\mathbf{y}) \cdot p_k(\mathbf{x}, \omega) \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

donde Γ_0 es la región en la que se realiza la regularización, que se toma como el elemento al que pertenece el punto de colocación.

Para mejorar el proceso de integración se han considerado dos métodos alternativos: una técnica de subdivisiones y la transformación de coordenadas de Telles [4]. Con la aplicación de esta última el proceso ha resultado más robusto y eficiente, reduciendo además el tiempo de computación.

4. EVALUACIÓN DE LOS FIT

Según el trabajo de Kassir y Sih [8], los Factores de intensidad de tensiones (FIT), que caracterizan el campo de tensiones en las proximidades de la grieta, se pueden obtener a partir del DAG cerca del frente de grieta tanto en el caso estático como en el dinámico.

Así, el FIT para el modo I, que es el que se va a presentar en los ejemplos numéricos, se puede poner como

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \Delta u_z \frac{\beta_1}{\frac{m_1}{1+m_1} - \frac{m_2}{1+m_2}} \quad (6)$$

siendo Δu_z el DAG en el nodo a $\frac{1}{4}$, L el tamaño del elemento a $\frac{1}{4}$ en sentido normal al frente de grieta, y β_1 , m_1 y m_2 son factores que dependen de las constantes elásticas del material.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se van a presentar resultados para tres problemas de grietas inmersas en materiales transversalmente isótropos.

El primero sirve como muestra de resolución de un problema dinámico, y consiste en una grieta circular en un medio infinito sometida a carga armónica. El segundo y tercero son problemas estáticos con geometría más complicada. Se trata de problemas de grietas rectas de borde en una pieza prismática sometida a tracción uniforme en sus extremos. Estos últimos ejemplos han servido para diseñar un proceso de integración adecuado y comprobar la robustez del método.

5.1 Grieta circular en medio infinito

Se considera una grieta circular en un medio infinito, contenida en un plano perpendicular al eje de simetría del material. La grieta está sometida a los efectos de ondas cuasi-longitudinales propagándose a lo largo del eje de simetría del material.

Los materiales considerados son un material compuesto grafito-epoxy ($C_{11}=13.92$ GPa, $C_{33}=160.7$ GPa, $C_{12}=6.92$ GPa, $C_{13}=6.44$ GPa, $C_{44}=7.07$ GPa, $\rho=1578$ kg/m³) y un material isótropo ($G=10^6$ Pa, $\nu=0.3$, $\rho=100$ kg/m³) que servirá para comparar resultados con otros autores.

Se emplean dos mallas distintas (Fig. 1) para obtener resultados con distintos rangos de frecuencia. Ambas cumplen la condición de que el tamaño máximo de los elementos sea menor que la décima parte de la menor longitud de onda considerada.

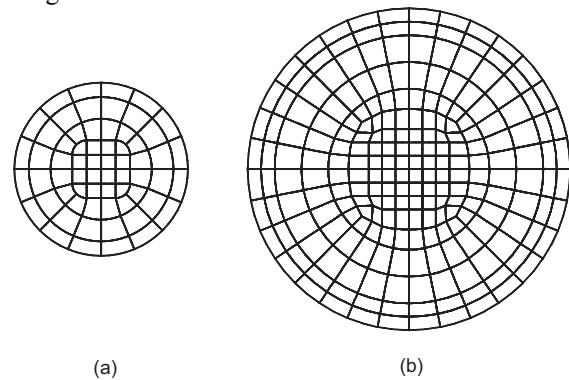


Fig.1 Grieta circular en medio infinito:

- (a) Malla para análisis de baja frecuencia
- (b) Malla para análisis de altas frecuencias

En las figuras 2y 3 se presentan resultados para dos rangos distintos de frecuencia. Los FIT se representan normalizados respecto al valor del SIF producido por una presión interna igual a la amplitud de la presión dinámica.

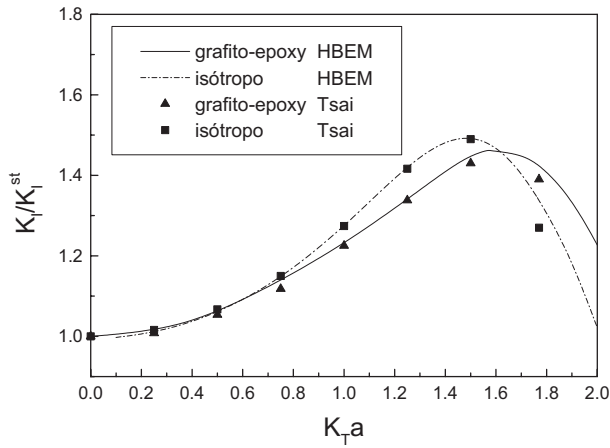


Fig. 2. FIT dinámico en modo-I de grieta circular en medio infinito (rango de baja frecuencia)

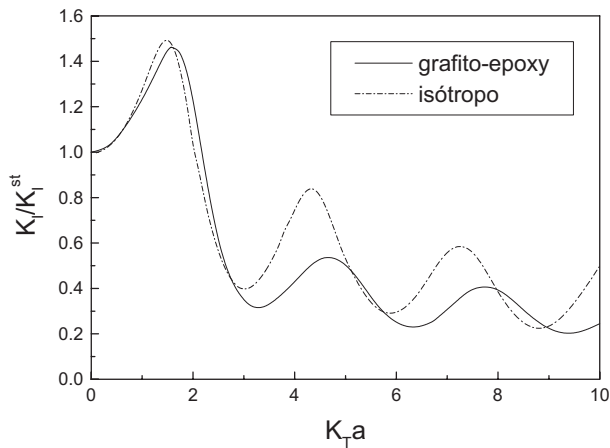


Fig. 3. FIT dinámico en modo-I de grieta circular en medio infinito (rango de alta frecuencia)

Para el rango de frecuencias más bajas, los resultados de la Fig.2 muestran un buen acuerdo con los obtenidos por Tsai [9]. Para el rango más alto de frecuencias (Fig. 3) no existen otros resultados conocidos por los autores.

5.2 Pieza prismática con grieta de borde sometida a tracción uniforme

En este caso se considera una grieta rectangular de borde contenida en el plano medio de una pieza prismática sometida a tracción uniforme en sus extremos, tal y como aparece en la Fig.3 ($H/a=1.75$, $W/a=3$, $t/a=2$). Se han obtenido resultados, además de para los dos materiales del ejemplo anterior, para un composite laminado con un mayor grado de anisotropía ($C_{11}=5.37$ GPa, $C_{33}=251.168$ GPa, $C_{12} = 1.34$ GPa, $C_{13}=3.35$ GPa, $C_{44}=5$ GPa).

En la Fig. 4 se muestra la evolución de K_I respecto a s/W , siendo s la coordenada que recorre el frente de grieta y que tiene su origen en medio del mismo (dada la simetría del problema, se representa solo la mitad de la gráfica).

Los resultados para el caso isótropo son muy parecidos a los obtenidos por Li *et al.*[10], mientras que para los otros dos materiales no existen resultados previos conocidos por los autores.

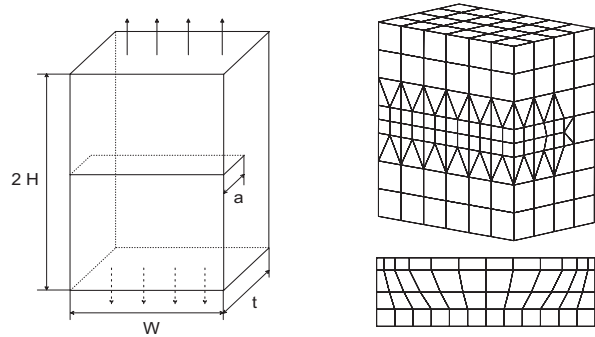


Fig.3 Geometría y discretización de barra prismática con grieta recta de borde

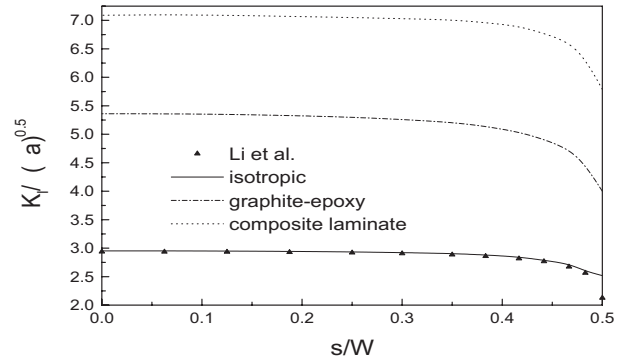


Fig.4. Resultados grieta recta de borde en pieza prismática para distintos materiales

5.3 Barra cuadrada con grieta de 1/4 círculo en una esquina, sometida a tracción uniforme

En este caso se trata de una pieza prismática sometida a tracción uniforme en sus extremos, con una grieta plana de borde con forma de 1/4 de círculo ubicada en una esquina del plano medio del prisma.

La geometría del problema se muestra en la Fig. 5, siendo $H=W$, $W/a=4$. Se han considerado los tres materiales de los dos ejemplos anteriores.

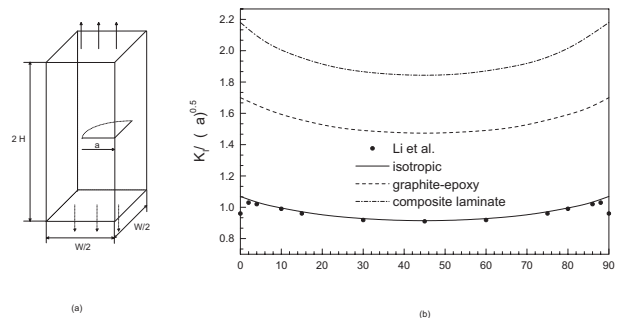


Fig.5 Geometría y valores del FIT en modo I para distintos materiales.

La flexión de la pieza considerada y la ubicación y forma de la grieta hacen que, de los tres problemas que se presentan en este artículo, éste sea sin duda el más complejo en cuanto a su resolución numérica, debido a la falta de uniformidad del campo de tensiones en cualquier zona del sólido.

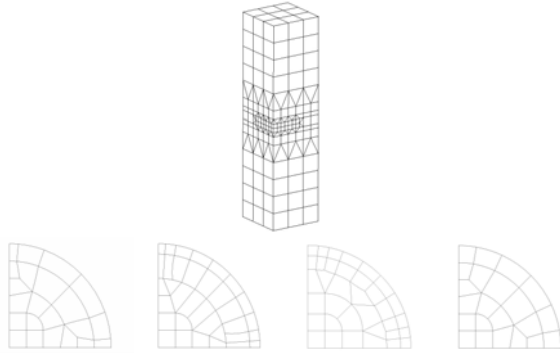


Fig. 6. Discretización del contorno externo y distintas discretizaciones de la grieta empleadas.

En la Fig. 5.b se muestra la evolución de KI respecto a θ para estos tres materiales (siendo θ el ángulo descrito al recorrer el frente de grieta). En el caso isótropo se muestra un buen acuerdo con los resultados de Li *et al.* [10]. Se puede observar que la evolución para los tres materiales es bastante similar, si bien los FIT alcanzan valores más elevados cuanto más anisótropo es el material.

Para comprobar la robustez de la metodología planteada, se han obtenido resultados con diversas discretizaciones (Fig. 6). En la Fig. 7 se muestran los resultados obtenidos para cada una de estas mallas y para el tipo de material más anisótropo de todos los considerados.

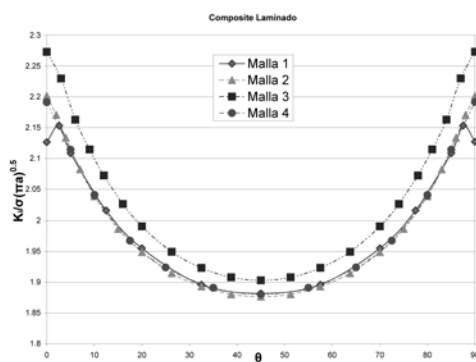


Fig. 7. Barra prismática con grieta de $\frac{1}{4}$ de círculo en una esquina: FIT en modo-I obtenido con distintas mallas.

Se puede observar que los resultados varían muy poco de una discretización a otra. Esta robustez ha sido posible en gran parte al empleo de la transformación de Telles [4], que agiliza y mejora la precisión del proceso de integración.

6. CONCLUSIONES

Se han presentado resultados de problemas estáticos y dinámicos de grietas tridimensionales obtenidos con una formulación mixta del MEC para materiales transversalmente isótropos.

La formulación presentada es sencilla y simplifica enormemente el proceso de discretización, ya que tan solo se hace necesaria la discretización del contorno externo y de la superficie de la grieta. Además, se obtienen buenos resultados con un número reducido de elementos.

Los resultados muestran la robustez y eficiencia del método.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación ofrecida por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (DPI2000-1217-C02-01 y DPI2001-2377-C02-01).

7. REFERENCIAS

- [1] Dominguez, J., Ariza, MP., and Gallego, R., Flux and traction boundary elements without hypersingular or strongly-singular integrals, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 48, (2000), 111--135.
- [2] Ariza, MP., and Dominguez, J., Boundary element formulation for 3-D transversely isotropic cracked bodies, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* (In press).
- [3] Ariza, M.P. and Dominguez, J., Dynamic BE analysis of 3-D cracks in transversely isotropic solids, *Computer Methods in Appl. Mech. Engrg.*, (2004), (In press)
- [4] Telles, J.C.F., A self-adaptative coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 24, (1987) 959—973
- [5] C. A. Brebbia and J. Dominguez, *Boundary Elements. An Introductory Course*, segunda edición, Computational Mechanics Publications, Southampton y McGraw-Hill, New York (1992)
- [6] Pan, YC. and Chou, TW., Point force solution for an infinite transversely isotropic solid, *J. Appl. Mech.*, 43, (1976) 608--612.
- [7] Wang, CY., and Achenbach, JD., 3-D Time-harmonic elastodynamic green's functions for anisotropic solids, *Proc. Roy. Soc. London*, A449, (1995), 441--458.
- [8] Kassir, MK. and Sih, GC., Three-dimensional stresses around elliptical cracks in transversely

isotropic solids, Engng. Fract. Mech., 1, (1968) 327-345.

[9] Tsai, YM., Dynamic penny-shaped crack in a transversely isotropic material, Eng. Fract. Mech., 31, (1988), 977--984.

[10] Li, S., Mear, ME., Xiao, L. Symmetric weak-form integral equation method for three-dimensional fracture analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 151, (1998), 435--459.