

INFLUENCIA DEL NÚMERO DE DATOS CENSURADOS EN LA EVALUACIÓN DEL CAMPO S-N

Castillo E.**, López Aenlle M.*, Ramos A.*, Fernández Canteli A.*

* Departamento de Construcción
Universidad de Oviedo, Campus de Viesques, s/n, -Gijón.

**Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Cantabria, Avda. de los Castros s/n, Santander.

Resumen. En el presente trabajo se estudia la influencia del número de datos censurados en el establecimiento y evaluación de un programa de ensayos de fatiga, mediante técnicas de simulación aplicadas a un modelo de evaluación del campo S-N. La simulación realizada para distintos programas de ensayos, permite comprobar la aplicabilidad del procedimiento en un programa experimental, así como observar la influencia de los datos censurados sobre los parámetros del modelo y sobre el percentil $P=0$. Cuando el número de datos censurados se mantiene por debajo de un determinado límite, los resultados obtenidos permanecen estables, mientras que por encima de ese límite, la fiabilidad de la evaluación disminuye rápidamente.

Abstract. In this work, the influence of the number of censored data on the planning and assessment of fatigue programs are studied by means of simulation techniques applied to a model related to the evaluation of the S-N field. The evaluation applied to different testing programs confirms the validity of the procedure allowing us to study the influence of the censored data on the model parameters and on the percentile curve $P=0$. When the number of the resulting censored data remains below a certain limit, the results obtained from the model evaluation remain stable whereas a detrimental influence on the reliability can be readily noticed if it overcomes that limit.

1. INTRODUCCIÓN

Los programas experimentales de fatiga, generalmente, implican un considerable gasto de tiempo y coste económico. La precisión obtenida en el análisis depende de la cantidad de datos disponibles, pero sobre todo del acierto en la elección de los rangos de tensión a considerar. Esta elección, aunque fijada provisionalmente antes del comienzo del plan de ensayos, podrá, y deberá en su caso, ser modificada en función de los propios resultados que se hayan ido produciendo en los ensayos. Sólo así se consigue una solución de compromiso entre la dimensión del programa de ensayos y la fiabilidad ofrecida en el análisis de resultados, es decir, entre el rigor estadístico que requiere toda evaluación y una razonable credibilidad en la caracterización del material.

Con objeto de reducir la duración de los programas experimentales, es práctica habitual la interrupción de los ensayos una vez alcanzado un determinado número límite de ciclos (habitualmente 2 ó 10 millones de ciclos). En ocasiones, la interrupción del ensayo puede deberse a causas accidentales o fortuitas o a causas ajenas, que se pueden considerar como roturas prematuras, no identificables con las roturas típicas de fatiga en la zona libre de la probeta, como sería el caso de una rotura en la zona de mordazas. Como consecuencia de lo anterior, al final del programa de

ensayos dispondremos de resultados de roturas y de datos censurados.

Aunque la información aportada por los ensayos censurados se puede considerar parcial, dado que sólo confirman que por debajo del límite no se produce la rotura, su inclusión en el ajuste puede contribuir, dependiendo de su número, a mejorar su fiabilidad. Así, cuando el número de ensayos censurados es elevado en relación con el número de roturas, la calidad del ajuste se resentirá. Por tanto, resulta interesante determinar el número máximo admisible de datos censurados en función del número de resultados de roturas disponibles. En cualquier caso, es evidente que en la evaluación del campo S-N es preciso disponer de un modelo estadístico capaz de tener en cuenta los datos censurados.

El hecho de que el número total de ensayos en los programas de fatiga sea, por razones de coste, generalmente bajo y que la proporción de datos censurados respecto del número de resultados de roturas pueda ser relativamente alta, influyen negativamente en la evaluación de los parámetros.

En este trabajo se utiliza el modelo de Castillo et al. [1], junto con técnicas de simulación, para determinar el número máximo de ensayos censurados que cabría admitir en un programa experimental a fin de que no

influyan negativamente en el ajuste.

2. MODELIZACIÓN DEL CAMPO S-N

En el campo de Wöhler, se definen dos variables aleatorias relacionadas entre sí: la vida a fatiga N y el rango de tensiones $\Delta\sigma$. El problema consiste, pues, en encontrar un modelo de regresión no-lineal que permita definir el campo S-N de fatiga, y evaluar los parámetros del modelo.

El modelo estadístico de Castillo et al. [2], resulta de la solución de una ecuación funcional, basada en la compatibilidad estadística de las distribuciones de roturas para rango de tensiones dado, $E(N; \Delta\sigma)$ y para número de ciclos dado, $F(\Delta\sigma; N)$, y permite el análisis del campo S-N mediante la evaluación de ensayos de fatiga de amplitud constante, incluyendo los datos censurados para el ajuste de los parámetros del modelo. Según este modelo, (Figura 1), el campo S-N para un elemento sometido a carga de amplitud constante viene definido como:

$$(\log N - B)(\log \Delta\sigma - C) = D \left[-\log(1 - P) \right]^{1/A} - E, \quad (1)$$

en el que N es la vida a fatiga medida en ciclos, $\Delta\sigma$ es el rango de tensión, P es la probabilidad de fallo; y A , B , C , D y E son los parámetros a estimar, con el siguiente significado:

A = Parámetro de forma de la distribución de Weibull.
 B = Valor umbral o número de ciclos límite.
 C = Límite de endurancia.
 D = Parámetro de escala.
 E = Parámetro que fija la posición de la curva límite, o de probabilidad nula.

Los valores de todos estos parámetros están acotados, ya que para que el resultado tenga sentido físico se debe de cumplir que $A > 1$, $D > 0$ y $E < 0$.

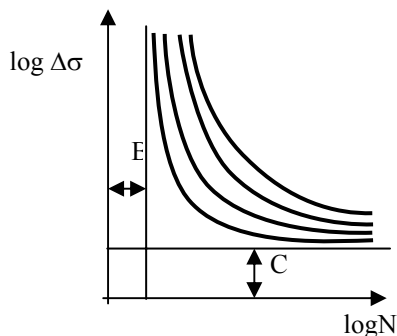


Fig. 1. Campo S-N según el modelo de Castillo et al.

3. CONSIDERACIÓN DE LOS DATOS CENSURADOS EN LA EVALUACIÓN

Debido a la presencia de resultados censurados, se

acude a técnicas estadísticas específicas tales como el algoritmo E-M, basadas en un proceso iterativo para su consideración en el análisis.

La técnica consiste en:

1. Estimar los parámetros del modelo con los resultados de las roturas.
2. Asignar los resultados censurados a valores esperados.
3. Estimar los parámetros del modelo con las roturas y los valores esperados de los datos censurados.
4. Repetir 2 y 3 hasta que converja el proceso.

Si denominamos como N_0 al límite de ciclos, el valor de la variable normalizada asociado a N_0 será:

$$V_0 = (\log N_0 - B)(\log \Delta\sigma - C), \quad (2)$$

y el valor de ciclos esperado vendrá dado por:

$$V^* = \lambda' + \delta' \left[\left(\frac{V_0 - \lambda'}{\delta'} \right)^{\beta'} - \log \left(1 - \frac{r}{m_i + 1} \right) \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (3)$$

donde m_i es el número de datos censurados coincidentes al mismo $\Delta\sigma$ y mismo límite de ciclos N_0 , para $r = 1, 2, 3, \dots, m_i$.

4. ESTRATEGIA DE ENSAYOS

Previamente a la realización de ensayos de fatiga, es necesario definir la estrategia a seguir [3], entendiendo como tal la definición de:

1. El rango mínimo de tensión $\Delta\sigma_{\min}$ (o nivel mínimo de tensión, σ_{\min} , para ciertos materiales, tales como hormigón).
2. El rango de tensión máximo $\Delta\sigma_{\max}$ (o nivel máximo de tensión, acorde con el apartado anterior). Este valor suele determinarse como una fracción de la resistencia estática.
3. El número total de niveles (entre σ_{\min} y σ_{\max}) sobre los que se deben realizar los ensayos.
4. El número de ensayos por nivel que, junto con la información del apartado 3 anterior, definen el número total de ensayos.
5. El número límite de ciclos, para el que se interrumpen los ensayos cuando no haya alcanzado la rotura. Tal como se ha indicado, en gran parte de los programas experimentales suele adoptarse como valor límite 2×10^6 ciclos.

En este trabajo se analiza la influencia del número de

datos censurados, presente en el conjunto de resultados del programa de ensayos, sobre el ajuste de los parámetros.

5. SIMULACIÓN

En la simulación se partió de los resultados obtenidos en un programa experimental de fatiga, realizado en el Laboratorio Federal de Ensayos de Suiza (EMPA-Dübendorf) sobre alambres de acero de pretensado [4]. Las probetas utilizadas presentaban una longitud libre de 1960 mm y fueron ensayadas a tracción de amplitud constante.

Los resultados obtenidos en el programa de fatiga quedan recogidos en la Tabla 1. En la Figura 2 se muestra el ajuste de los resultados experimentales, junto con los valores de los parámetros del modelo de fatiga de Castillo et al.

Tabla 1. Resultados de ensayos a fatiga de amplitud constante, [4].

$\Delta\sigma$ (N/mm ²)	Ciclos	
	L=1960 mm	
630	53000	63000
	54000	73000
	62000	
460	138000	
420	215000	
380	300000	
360	281000	474000
	359000	506000
	364000	
340	350000	2000000*
	619000	2000000*
320	431000	594000
	512000	2000000*
300	455000	2000000*
	2000000*	2000000*
260	2000000*	

* Los ensayos alcanzaron el número límite de ciclos sin rotura

En cada una de las simulaciones se mantuvieron como valores fijos de las variables: nivel de tensión máxima, $\sigma_{\max} = 630$ Mpa, nivel de tensión mínima, $\sigma_{\min} = 260$ Mpa, y número de niveles, $Niv = 5$, mientras que se variaron el número total de datos censurados, RO, (desde 0 datos censurados hasta el 30% del número total de ensayos) y el número total de ensayos (20, 30, 50 y 80 ensayos). Para cada valor del par “datos censurados - número total de ensayos” se realizaron 1000 simulaciones.

En algunas de las simulaciones se obtuvieron valores de los parámetros fuera del rango de acotación (ver apartado 2), un hecho poco habitual, pero más frecuente cuando el número total de ensayos es reducido. Teniendo en cuenta su inconsistencia física [5], se procedió a la repetición de la simulación, al considerarla en este caso fallida

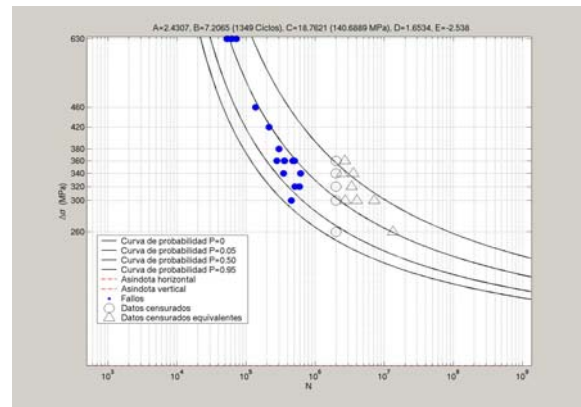


Fig. 2. Campo S-N deducido para el programa de ensayos experimental.

Con el objeto de determinar la influencia del número de datos censurados en el ajuste de los resultados, se analizaron las siguientes variables:

- El coste del programa de ensayos, tomando como precio de referencia 15 € por hora de ensayo a una frecuencia de 10 Hz, considerando suplementariamente 1 hora equivalente de ensayo para la preparación, montaje y desmontaje de cada probeta.
- Un índice que informa sobre el error cometido en la determinación de cada uno de los parámetros del modelo y de los valores asociados a cada curva de percentiles. En este caso se eligió el error cuadrático medio I_E de los 1000 valores Z_i obtenidos por simulación, definido mediante:

$$I_E = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i - Z^*}{Z^*} \right)^2}{n} \quad (4)$$

siendo n el número total de simulaciones y Z^* el valor de partida del parámetro, obtenido mediante ajuste inicial de los resultados. Cuanto menor sea el índice I_E , menor será la dispersión en los resultados obtenidos en la simulación, y por tanto, menor la dispersión esperable de los posibles resultados experimentales. Como consecuencia, el índice I_E es una medida de la fiabilidad del ajuste, ya que cuando I_E disminuye significa que la fiabilidad aumenta.

Debe tenerse en cuenta que cuando no hay datos censurados en la muestra, los resultados de la simulación presentan asimismo una cierta dispersión. El error cuadrático medio de estas simulaciones, I_{EO} , será el valor mínimo que se podrá alcanzar cuando no haya datos censurados en la muestra, por lo que representa una cota inferior.

A partir de las simulaciones se pueden deducir las distribuciones de los parámetros del modelo y, a partir de éstas, las de los distintos percentiles. En fatiga, los datos de mayor interés son el límite de endurance (parámetro C del modelo) y la vida a fatiga asociada al percentil más representativo, $P=0$ o $P=0.05$ [6,7].

6. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

6.1 . Resultados de la simulación del parámetro C (o límite de endurance).

En la figura 3 se muestran los resultados de la simulación para el parámetro C (asíntota horizontal del campo S-N en el modelo de Castillo et al.) en función del número de datos censurados, para un número total de ensayos de 30.

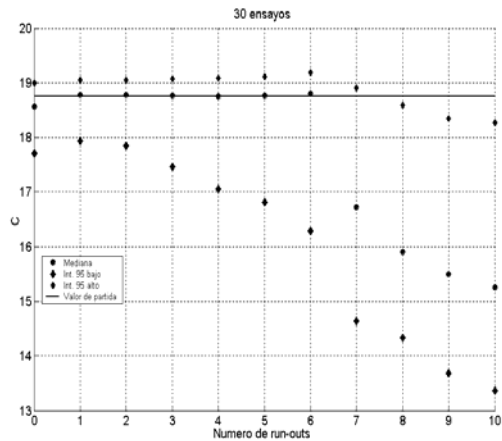


Fig. 3. Resultados de la simulación para el parámetro C.

En lo que respecta al valor de la mediana de los resultados de la simulación, se observa que ésta coincide con el valor de partida utilizado en la simulación siempre que $RO < 6$, que representa aproximadamente el 20% del total de ensayos. A partir de este valor, el error de la mediana respecto a su valor de partida crece rápidamente. Este comportamiento es además independiente del número total de ensayos (Tabla 2).

Asimismo en la figura 3 se aprecia cómo la dispersión de los resultados de la simulación se va incrementando, a medida que el número de datos censurados crece.

En la figura 4 se muestra el error cuadrático medio I_E en

función del número de dato censurados para un total de 30 ensayos. Hasta 3 datos censurados, que representa el 10% del total de ensayos, I_E permanece estable, comenzando su ascenso a partir de este valor. Para más de 6 datos censurados el error crece rápidamente. Este comportamiento es independiente del número total de ensayos, según se constata en las Tablas 3 y 4.

Tabla 2. Número de datos censurados en donde se produce un cambio brusco de pendiente en la mediana.Parámetro C.

Nº total de ensayos	20	30	50	80
Número de datos censurados	4	6	9	15
% de datos censurados respecto del total	20%	20%	18%	19%

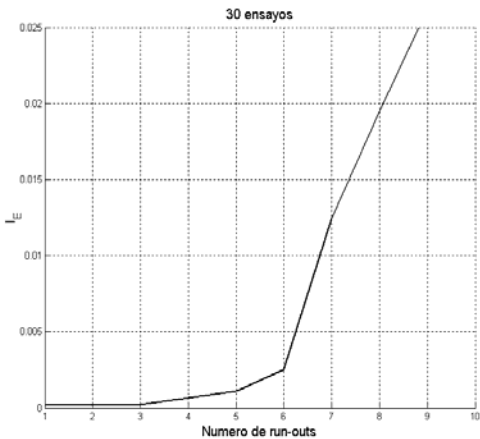


Fig. 4. Índice de error I_E del parámetro C en función del número de datos censurados, para 30 ensayos

Se deduce, por lo tanto, que para obtener un valor razonablemente fiable del límite de endurance (parámetro C), el porcentaje de datos censurados presente en la muestra, con respecto al total de ensayos, no debería ser superior a 12%.

Tabla 3. Porcentaje máximo de datos censurados en función del error cuadrático medio para el parámetro C.

Nº total de ensayos	I_{EO}	datos censurados para que $I_E < 2 \cdot I_{EO}$		datos censurados para que $I_E < 5 \cdot I_{EO}$	
		Nº	% respecto al total	Nº	% respecto al total
20	3.3×10^{-4}	2-3	10-15%	3-4	15-20%
30	1.5×10^{-4}	3-4	10-12%	4-5	13-16%
50	1.1×10^{-4}	6-7	12-14%	7-8	14-16%
80	6.6×10^{-5}	12-13	15-16%	16-17	20-21%

A su vez, el coste del programa de ensayos disminuye a medida que el número de datos censurados aumenta. No obstante, cuando el porcentaje de datos censurados es mayor del 25%, la disminución del coste es menor.

Tabla 4. Porcentaje máximo de datos censurados en función del error cuadrático medio del parámetro C.

Nº total de ensayos	% de datos censurados para $I_E \leq 5 \cdot 10^{-4}$	% de datos censurados para $I_E \leq 10^{-3}$	% de datos censurados para $I_E \leq 5 \cdot 10^{-3}$	% de datos censurados para $I_E \leq 10^{-2}$
20	12%	16%	21%	23%
30	13%	16%	20%	23%
50	14%	16%	20%	24%
80	15%	17.5%	22.5%	26.5%

Teniendo en cuenta que el objetivo de una planificación correcta del programa de ensayos consiste en minimizar tanto el error como el coste, se puede definir el factor:

$$EC = \text{error} \times \text{coste} \quad (5)$$

por lo que el porcentaje óptimo de datos censurados será aquél que minimiza el factor EC.

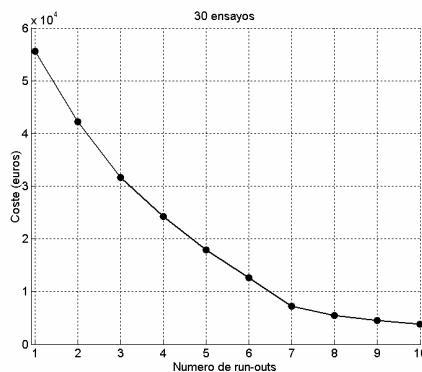


Fig. 5. Coste del programa de ensayos.

Para un total de 30 ensayos, el mínimo valor de EC se produce para un porcentaje de datos censurados del 10%. Se comprueba, además, que este valor es independiente del número total de ensayos.

6.2. Resultados de la simulación de los parámetros B, D y E

En lo que respecta a los parámetros B, C y E, éstos siguen la misma tendencia que el parámetro C, por lo que se establecen las mismas conclusiones.

6.3. Resultados de la simulación del percentil P=0

En fatiga, uno de los datos de mayor interés está representado por la vida a fatiga asociada a la curva de probabilidad $P=0$. Particularizando la ecuación (1) para $P=0$ se obtiene:

$$(\log N - B)(\log \Delta\sigma - C) = -ED, \quad (6)$$

por lo que los valores asociados al percentil de probabilidad $P=0$ depende de los parámetros B, C, D y E. En la figura 6 se muestran los resultados de la simulación del percentil $P=0$ para el nivel de tensión $\Delta\sigma = 630$ MPa, en el caso de un total de 50 ensayos.

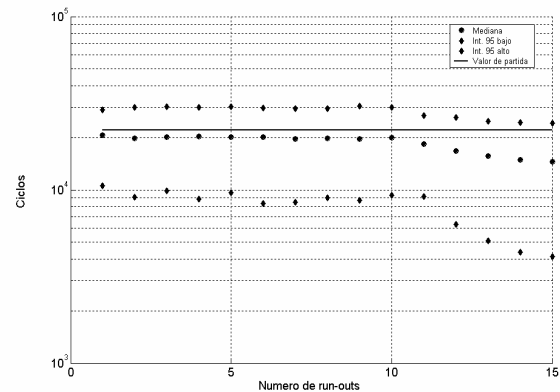


Fig. 6. Resultados de la simulación. Número de ciclos para $P=0$ y $\Delta\sigma=630$ MPa.

Como se puede observar, el error en la mediana respecto al valor de partida se mantiene aproximadamente constante en el rango $RO \leq 10$, que representa aproximadamente el 20% del total de ensayos, partir del cual crece rápidamente.

Esta propiedad es además independiente del número total de ensayos y del nivel de tensión (Tabla 5), por lo que el error en la mediana sigue la misma tendencia que la mostrada por los parámetros.

En la Figura 7 se muestra el error cuadrático medio para $P=0$, $\Delta\sigma=630$ MPa y 50 ensayos.

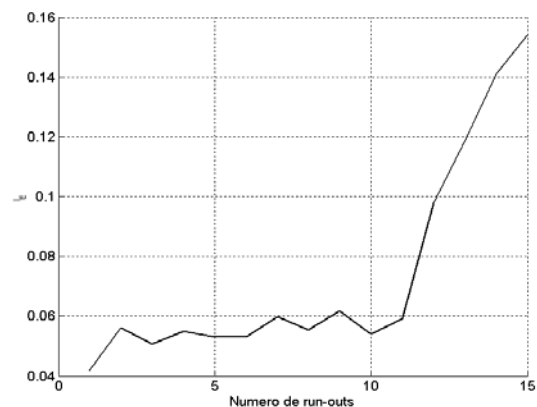


Fig. 7. Error cuadrático medio para $P=0$ y $\Delta\sigma=630$ MPa .

En este caso, el error se mantiene estable cuando el número de datos censurados es inferior a 11, lo que representa un 22% del total de ensayos. Se comprueba igualmente que esta propiedad es independiente del número total de ensayos, tal y como queda reflejado en la Tabla 5.

Tabla 5. Porcentaje máximo de datos censurados en función del error cuadrático medio. Curva de $P=0$ y nivel de tensión $\Delta\sigma=630\text{MPa}$.

Nº total de ensayos	% de datos censurados para $I_E \leq 0.08$	% de datos censurados para $I_E \leq 0.1$	% de datos censurados para $I_E \leq 0.15$	% de datos censurados para $I_E \leq 0.2$
20	-	-	25%	30%
30	20%	23%	27%	30%
50	22%	24%	28%	>30%
80	22%	26%	>30%	>30%

A la vista de los resultados se deduce que los datos censurados tienen mayor influencia en los parámetros B, C, D y E que en los valores asociados al percentil $P=0$.

En lo que se refiere al factor EC, el valor óptimo se obtiene para un porcentaje de datos censurados en el entorno del 15-20%

7. CONCLUSIONES

- La consideración de los datos censurados en el ajuste de resultados de fatiga para la determinación del campo S-N, supone una potencial mejora en la fiabilidad del ajuste de parámetros
- El modelo de Castillo et al. junto con técnicas de simulación permiten desarrollar una metodología para determinar el número admisible de datos censurados en un programa experimental de fatiga.
- Cuando el porcentaje de datos censurados se mantiene por debajo del 20%, el valor mediana de cada uno de los parámetros, obtenido a partir de las simulaciones, es similar al valor que se toma de partida.
- El error cuadrático medio para los parámetros B, C, D y E crece lentamente cuando el porcentaje de datos censurados es menor del 12%, experimentando un rápido ascenso partir de este valor.
- Para los valores asociados al percentil $P=0$, el error cuadrático medio crece lentamente cuando el porcentaje de datos censurados es menor del 20%. A partir de este valor el error crece rápidamente.

- A la vista del análisis realizado y a falta de un estudio más extensivo, se recomienda que el porcentaje de datos censurados presente en un programa de ensayos no supere en ningún caso el 10% del número total de ensayos.

REFERENCIAS

- [1] E. Castillo, A. Fernández Canteli, V. Esslinger, B.Thürlimann. "Statistical Model for Fatigue Analysis of Wires, Strands and Cables". IABSE Proceedings P-82/85, 1985.
- [2] E. Castillo, A. Fernández Canteli. "Statistical Models for Fatigue Analysis of Long Elements". IABSE Reports, Vol. 66, págs. 15-32, 1992.
- [3] E. Castillo, A. Fernández Canteli. "A General Regression Model for Lifetime Evaluation and Prediction". Int. Journal of Fracture, N° 107, págs. 117-137, 2001.
- [4] Fernández Canteli A., Esslinger V., Thürliman B. "Ermüdungsfestigkeit von Bewehrungs- und Spannstählen". Bericht Nr. 8002-1, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1984.
- [5] Castillo, E. and Hadi, A.S., J. of American Statistical Assoc., Vol 90, págs. 1041-1054, 1995.
- [6] E. Castillo, M. López Aenlle, M. J. Lamela, A. Fernández Canteli. "Evaluation of Fatigue Life Data By Normalising Procedures". European Conference on Fracture, San Sebastián, 2000
- [7] M. López Aenlle, "Caracterización a fatiga de materiales compuestos bajo carga aleatoria y carga por bloques". Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, 2000.