

# SIMULACION NUMERICA DE LOS MECANISMOS DE DEFORMACIÓN Y FRACTURA DE FIELTROS

C. González<sup>1</sup>, J. LLorca<sup>1</sup>, I. Romero<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ciencia de Materiales. Universidad Politécnica de Madrid.  
E. T. S. de Ingenieros de Caminos. 28040 Madrid

<sup>2</sup>Departamento de Mecánica de Medios Continuos. Universidad Politécnica de Madrid.  
E. T. S. de Ingenieros de Caminos. 28040 Madrid

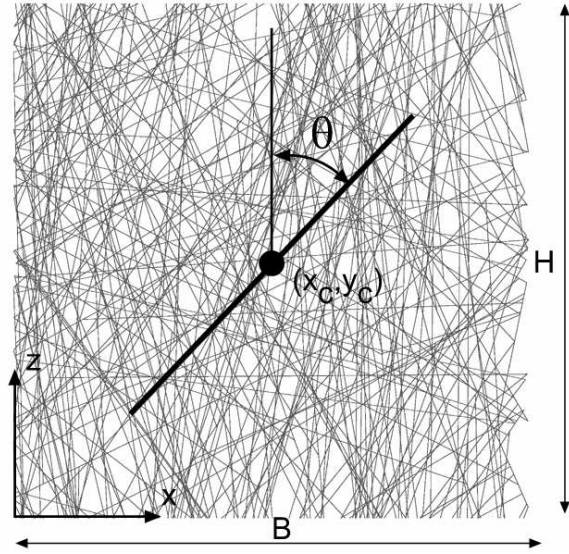
**Resumen.** Se ha desarrollado un modelo numérico para simular el comportamiento mecánico de un fieltro de fibras sometido a cargas en su propio plano. El fieltro se idealizó mediante una retícula bidimensional obtenida colocando fibras sobre un área rectangular con una posición y orientación dada por una función de probabilidad conocida. Las intersecciones de cada fibra con el resto de fibras del fieltro y con las fronteras del área constituyeron los nodos del modelo. Aquellos nodos que pertenecían a una misma fibra se unieron mediante elementos estructurales de tipo barra articulada. La interacción entre fibras se simuló mediante elementos que coaccionaron la variación del ángulo entre dos barras unidas a un mismo nodo. Finalmente, también se incluyó la posibilidad de pandeo, rotura y deslizamiento de las barras como posibles mecanismos de deformación y rotura de las mismas. Las cargas de las barras y los desplazamientos de los nodos se obtuvieron mediante un programa de elementos finitos que permitió integrar las ecuaciones siguiendo un algoritmo basado en la formulación de Newmark. Los resultados numéricos obtenidos se comparan con las curvas tensión-deformación obtenidas experimentalmente en un fieltro de fibras de polietileno.

**Abstract.** A micromechanical model was developed to simulate the mechanical response of a felt made up of finite length fibers subjected to in-plane loads was developed. The felt was idealized as a bidimensional network created by placing individual fibers at a position and orientation over a rectangular surface. The intersections between fibres formed the nodes of the model. Adjacent nodes were connected through bars that transferred load in the fibre direction. Spring elements were also added to penalize the variation of the angle between neighbour fibres. The model includes the possibility of fiber buckling and sliding as the most important deformation and fracture mechanisms. Fiber loads and nodes displacements were computed using a finite element scheme that integrated dynamic equilibrium equations using the Newmark algorithm. Numerical results computed through with model were compared with experimental results on a felt made up of polyethylene fibers.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, los materiales compuestos reforzados con fibras son candidatos idóneos para muchas aplicaciones estructurales. Sin embargo, la fabricación de estos materiales es bastante costosa puesto que las fibras deben entrelazarse para formar estructuras complejas que distribuyan los esfuerzos de acuerdo con los criterios de diseño. Además, las fibras deben protegerse para lograr la estanqueidad del material y protección frente a los agentes agresivos. Una alternativa más barata a estos materiales en los casos en los que no sea necesaria la presencia de la matriz es la fabricación de fieltros. En estos materiales, las fibras se depositan aleatoriamente en un plano uniéndose en ciertos puntos de anclaje mediante la fusión de las fibras por calor o imbricando las fibras mediante peinado mecánico o punzonamiento. Las propiedades mecánicas de estos materiales son moderadas reduciendo su campo de aplicación a la protección balística, textiles ignífugos o geotextiles para refuerzo de suelos [1]. Un ejemplo especialmente importante de fieltro es el papel. Se trata de un fieltro de fibras de celulosa imbricadas y unidas mediante puentes de hidrógeno.

Los primeros modelos de comportamiento mecánico para fieltros nacen al amparo de la comunidad científica del papel. Así, Cox [2] desarrolló un modelo analítico de deformación afín para predecir las constantes elásticas de un fieltro formado por fibras rectas indefinidas perfectamente unidas sin interacción entre ellas. Sin embargo, los fieltros reales se fabrican con fibras de longitud finita depositadas aleatoriamente y cuya geometría dista de ser recta. Por esta razón, las predicciones de Cox deben ser entendidas como límites superiores no alcanzables en tejidos de fibras cortas. Diversos autores han modificado dicha fórmula para tener en cuenta todos estos factores, Kalmes y Corte [3]. En la actualidad y dado el grado de desarrollo de las capacidades de cálculo, los modelos computacionales constituyen una alternativa eficiente para la simulación del comportamiento mecánico de los fieltros, Heyden [4]. En el presente estudio se ha desarrollado un modelo computacional de elementos finitos que tiene en cuenta la longitud finita de las fibras y la interacción entre ellas. El modelo está formulado en el contexto de las grandes deformaciones y tiene en cuenta los principales mecanismos de deformación y fractura de los fieltros.



**Fig. 1.** Red bidimensional que representa el fieltro y definición de la posición de una fibra.

## 2. GENERACIÓN DE LAS RETÍCULAS

Se supondrá que las propiedades mecánicas del fieltro se obtienen modelizando una retícula formada por la superposición de  $N$  fibras rectas de igual longitud  $L$  y diámetro  $\phi$  homogéneamente distribuidas sobre una superficie rectangular de lados  $B \times H$ , Figura 1. Más detalles sobre el algoritmo de generación de las retículas se pueden encontrar en González *et al.* [5]. La posición geométrica de una fibra dentro del tejido queda definida a partir de las coordenadas de su centro geométrico  $(x_c, y_c)$  y el ángulo  $\theta$  que forma con respecto al eje de aplicación de la carga.

Se lanza la fibra  $i$ -ésima y se calcula la intersección de esta fibra con el resto de fibras del modelo que ya han sido lanzadas (dependiendo de su posición y orientación la intersección puede no existir), Figura 1. Cada intersección de fibras constituye un nodo del modelo. Los extremos no conectados de cada fibra son eliminados sistemáticamente del modelo pues son partes mecánicamente no activas.

El número de fibras que se ha utilizado en los modelos satisface dos limitaciones. En primer lugar, la estructura debe estar suficientemente interconectada. Las barras no conectadas y aquellas que no transmiten cargas independientemente del estado al que se somete el tejido constituyen partes no activas del modelo. Cuando el tamaño de la zona no activa del modelo es suficientemente grande, el tejido no es capaz de transmitir cargas, alcanzándose el límite de percolación. De acuerdo con los estudios realizados por Åström y Niskanen [6] la longitud total de fibra depositada en el modelo debe ser superior a

$$L_f \gg 5.7 \frac{BH}{L} \quad (1)$$

Por otra parte, el tamaño de la retícula es un compromiso entre una adecuada representación de los mecanismos de deformación del tejido y los recursos computacionales disponibles. En tejidos fabricados por deposición de fibras, la interconexión de las mismas en el espesor es reducida. La mayor parte de las conexiones entre fibras tienen lugar a lo largo de planos que permiten estudiar la totalidad del tejido a partir de una capa representativa de pequeño espesor. Suponiendo que la capa representativa del tejido tiene un espesor igual al diámetro de una fibra,  $t = \phi$ , la longitud de fibra que deberemos depositar sobre la superficie para que su densidad alcance a la del tejido real será

$$L_f = \bar{c} \frac{4BH}{\pi\phi} \quad (2)$$

donde  $\bar{c}$  el índice de cubrimiento medio o densidad relativa del tejido con respecto a las fibras ( $\rho_{\text{reticula}} = \bar{c} \rho_{\text{fibra}}$ ). Según Kalmes [3], el número medio de intersecciones de fibra que se produce en la retícula es

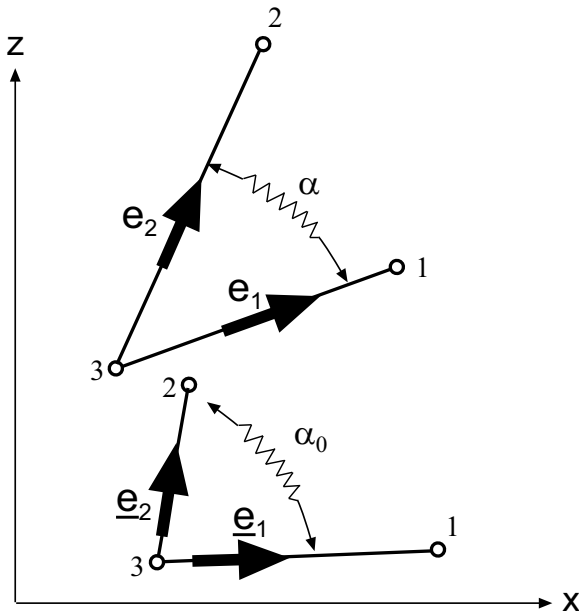
$$n_c = \frac{1}{\pi} \frac{L_f^2}{BH} = \frac{16}{\pi^3} BH \left( \frac{\bar{c}}{\phi} \right)^2 \quad (3)$$

y sirve como estimador de las necesidades computacionales necesarias para obtener una retícula cuya densidad sea equivalente a la densidad real del tejido.

## 3. MODELO COMPUTACIONAL

### 3.1 Formulación de los elementos

Para simular el comportamiento mecánico de un fieltro de fibras se utilizó el método de los elementos finitos. Dos nodos consecutivos que pertenecen a una misma fibra se unieron mediante elementos de tipo barra que se encargan de transmitir las cargas en la dirección de la fibra. Posteriormente, se añaden elementos de tipo muelle que penalizan la variación del ángulo  $\alpha$  entre dos barras que convergen a un mismo nodo y pertenecen a fibras distintas, Figura. 2. Este tipo de elementos se introduce para simular la unión elástica que existe en el anclaje entre las fibras debido al proceso de fabricación del fieltro.



**Fig. 2.** Elementos barra que transmiten carga en la dirección longitudinal de cada barra y elementos muelle que penalizan la variación del ángulo entre las dos barras en las geometrías inicial y deformada.

Sean  $\mathbf{x}_1^T = (x_1, z_1)$ ,  $\mathbf{x}_2^T = (x_2, z_2)$  y  $\mathbf{x}_3^T = (x_3, z_3)$  las coordenadas de los nodos y  $\mathbf{d}_1^T = (u_1, w_1)$ ,  $\mathbf{d}_2^T = (u_1, w_1)$  y  $\mathbf{d}_3^T = (u_3, w_3)$  sus respectivos desplazamientos. Los elementos de tipo barra transmiten las fuerzas en su propia dirección y, por tanto, las fuerzas en los nodos responden a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{\text{barra}} &= F_1(\delta_1) \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{q}_2^{\text{barra}} &= F_2(\delta_2) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{q}_3^{\text{barra}} &= -(\mathbf{q}_1^{\text{barra}} + \mathbf{q}_2^{\text{barra}}) \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\delta$  es el alargamiento que experimenta cada barra,  $F(\delta)$  es su ecuación constitutiva y  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  sendos vectores unitarios que llevan la dirección de cada elemento barra en la configuración geométrica deformada.

Las fuerzas introducidas por los elementos muelle se pueden calcular suponiendo que la energía elástica del muelle procede de un potencial elástico de la forma

$$W(\alpha - \alpha_0) = \frac{1}{2} K(\alpha - \alpha_0)^2 \quad (5)$$

donde  $K$  es la constante de rigidez del muelle. Para este tipo de elementos muelle las expresiones de los vectores de fuerzas nodales son

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{\text{muelle}} &= \frac{K(\alpha - \alpha_0)}{t_1 \sin \alpha} (\cos \alpha \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{q}_2^{\text{muelle}} &= \frac{K(\alpha - \alpha_0)}{t_2 \sin \alpha} (\cos \alpha \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{q}_3^{\text{muelle}} &= -(\mathbf{q}_1^{\text{muelle}} + \mathbf{q}_2^{\text{muelle}}) \end{aligned} \quad (6)$$

Las expresiones de las matrices de rigidez estática correspondientes a estos elementos se determinan fácilmente diferenciando las expresiones anteriores con respecto a los desplazamientos nodales, González *et al.* [5]. La matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$  y los vectores de fuerzas internas de la retícula  $\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d})$  se obtienen mediante ensamblaje de las mismas variables correspondientes a los elementos.

### 3.2 Ecuación constitutiva de los elementos barra

Tal y como se ha mencionado, los nodos consecutivos que pertenezcan a una misma fibra se unen mediante una barra, que debe transmitir los esfuerzos en la dirección de la fibra y cuya ecuación constitutiva debe responder adecuadamente a los mecanismos de deformación de los tejidos. En los tejidos reales, la transmisión de dichas cargas es deficiente cuando las fibras no son rectas o tienen imperfecciones geométricas como consecuencia de su proceso de fabricación.

Para tener en cuenta dicho efecto se ha procedido como sigue. Se define índice de curvatura  $\kappa_0$  de una fibra a la relación entre la distancia entre los extremos de la misma y su longitud real. Así, cuando dicho cociente es la unidad estamos ante el caso de una fibra recta. Se ha supuesto que la geometría de las fibras se puede representar adecuadamente mediante un arco de circunferencia de radio  $R$  y, por tanto, el índice de curvatura en este caso será,

$$\kappa_0 = \frac{2R}{L_f} \sin\left(\frac{L_f}{2R}\right) \quad (7)$$

La respuesta mecánica de una fibra curva depende de la curvatura inicial de la misma. La Figura 3 muestra dicha respuesta para una fibra cuyo índice de curvatura es  $\kappa_0 = 1.9$  cuando se somete a un estado de cargas de tracción uniaxial. Se ha supuesto que la fibra es inextensible y, por tanto, su longitud permanece inalterada. Los detalles de los cálculos necesarios para llegar a dicha solución analítica pueden encontrarse en González *et al.* [7]. La respuesta inicial es elástica y lineal gobernada por la pendiente

$$\frac{EI}{2R^3} \varphi^{-1}\left(\frac{L_f}{2R}\right) \quad (8)$$

donde  $E$  es el módulo elástico de la fibra,  $I = \pi\phi^4/64$  su momento de inercia y  $\phi$  un factor geométrico que depende de  $\kappa_0$ . Conforme se va aumentando la carga la respuesta es claramente no lineal disminuyendo progresivamente su curvatura hasta que la fibra desarrolla completamente su longitud. La asíntota de dicho comportamiento se alcanza cuando los extremos de la fibra se han separado una distancia

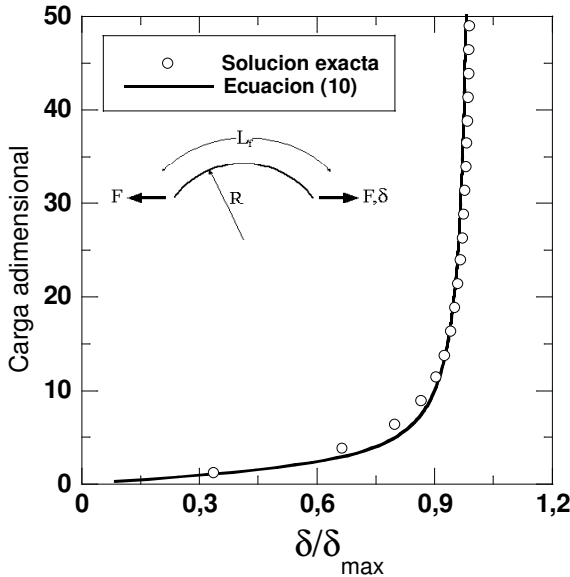
$$\delta_{\max} = L_f (1 - \kappa_0) \quad (9)$$

La forma de la ecuación constitutiva que gobierna el comportamiento de una fibra se ha inferido a partir del análisis anterior. Basta con buscar una función cuya pendiente inicial sea la prevista por la ecuación (8) y que muestre una asíntota vertical cuando los desplazamientos entre los extremos de la fibra alcancen el valor máximo  $\delta_{\max}$ . En el presente trabajo proponemos la siguiente función que relaciona las cargas de tracción uniaxial  $F$  transmitidas por una fibra con el desplazamiento de sus extremos  $\delta$

$$F(\delta) = \frac{1}{6} \frac{EI\delta_{\max}}{R^3\phi} L^{-1}\left(\frac{\delta}{\delta_{\max}}\right) \quad (10)$$

donde  $L^{-1}$  es la inversa de la función de Langevin. Dicha función gobierna el comportamiento de cadenas poliméricas cuando se aplican dos cargas opuestas de tracción entre sus dos extremos. Su expresión matemática es

$$L(x) = \frac{1}{\tanh(x)} - \frac{1}{x} \quad (11)$$



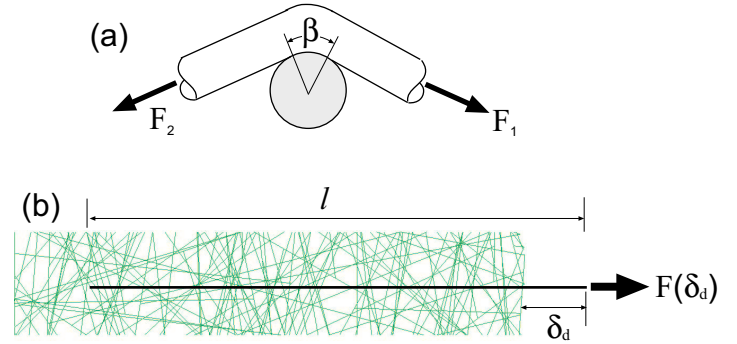
**Fig. 3.** Respuesta mecánica de una fibra curva sometida a cargas de tracción en sus extremos. Las cargas se han adimensionalizado por el factor  $EI\delta_{\max}/(6R^3\phi)$ .

La Figura 3 también compara la solución exacta para el problema de la fibra curva y la aproximación propuesta en la ecuación (10). La diferencia entre ambas es despreciable e indica que la naturaleza de los dos procesos de deformación es semejante.

La respuesta de cada barra en compresión fue elástica y lineal con una rigidez inicial dada por la ecuación (8) y sirvió para tener en cuenta el efecto del pandeo.

### 3.2 Deslizamiento entre las fibras

El deslizamiento de fibras es uno de los principales mecanismos de disipación energética en los fieltros. Cuando las uniones entre fibras son débiles, las cargas transmitidas por las mismas están limitadas por el deslizamiento. En el presente trabajo, se ha introducido este efecto modificando la ecuación constitutiva elástica no lineal que se ha mostrado más arriba.



**Fig. 4.** (a) Esquema del contacto entre dos fibras. Modelo de rozamiento. (b) Proceso de extracción de una fibra del tejido.

La Figura 4 (a) muestra un esquema de una unión entre dos fibras. Suponiendo que el contacto entre las dos fibras obedece a una ley de Coulumb la relación entre las cargas transmitidas por la fibra en ambos lados de la misma cuando se ha producido el deslizamiento es

$$F_1 = F_2 \exp(\mu\beta) \quad (12)$$

donde  $\mu$  y  $\beta$  son, respectivamente, el coeficiente de rozamiento y el ángulo de contacto entre las fibras. La Figura 4 (b) muestra el proceso de deslizamiento de una fibra del resto del tejido. Una vez que se ha producido el deslizamiento del conjunto de la fibra, las tensiones que transmiten cada una de sus barras obedecen a la ecuación (12) y, por tanto,

$$\begin{aligned} F_1 &= F_0 \exp(\mu\beta_1) \\ F_2 &= F_1 \exp(\mu\beta_2) = F_0 \exp[\mu(\beta_1 + \beta_2)] \\ F_n &= F_{n-1} \exp(\mu\beta_n) = F_0 \exp\left[\mu \sum_{i=1}^n \beta_i\right] \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $\sum_1^n \beta_i$  representa la suma de todos los ángulos de contacto entre la fibra que desliza y el resto de fibras del fieltro y,  $n$ , el número de barras que la componen. La ecuación (13) postula que la tensión transmitida por una fibra que desliza depende exponencialmente de la suma de los ángulos de contacto y, por tanto, del total de longitud de fibra que continua embebida en el tejido. En el presente trabajo supondremos que  $n$  es suficientemente grande para que

$$\sum_1^n \beta_i = \sigma(l - \delta_d) \quad (14)$$

donde  $\sigma$  es un factor que depende de la distribución estadística de los ángulos de contacto de la fibra que desliza,  $l$  es la longitud de fibra inicialmente embebida en el tejido y  $\delta_d$  la longitud de fibra que ha deslizado. Finalmente, combinando los resultados de (13) y (14) obtenemos la tensión transmitida por una fibra que desliza

$$F(\delta_d) = F_0 \exp[\xi(l - \delta_d)] \quad (15)$$

La ecuación anterior muestra que la tensión transmitida por una fibra que desliza decrece monótonamente al disminuir la longitud de fibra embebida y es nula una vez que se ha extraído ésta completamente, es decir, cuando  $\delta_d > l$ . El área bajo la curva  $F(\delta_d)$  representa la disipación energética por rozamiento durante el proceso de extracción de una fibra del resto del tejido. La longitud de fibra embebida  $l$  y el número de barras  $n$  que la componen son un resultado del proceso de generación de las retículas. Así, durante el proceso de generación de las mallas se almacenó la distancia mínima entre cada barra y los extremos de la fibra a la que pertenece y el número de barras que integraban dicha longitud.

### 3.3 Integración de las ecuaciones

El algoritmo que se ha empleado para integrar en el tiempo las ecuaciones dinámicas del problema es el método de Newmark [8]. Suponiendo conocida la solución del problema en el instante  $t=t_n$  se buscan las soluciones de las variables cinemáticas  $\mathbf{a}_{n+1}$ ,  $\mathbf{v}_{n+1}$  y  $\mathbf{d}_{n+1}$  en el instante  $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ . Las ecuaciones que definen las condiciones de equilibrio dinámico nodal en ausencia de fuerzas viscosas

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1}) = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (16)$$

donde la matriz  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa. El método de Newmark aproxima las posiciones y velocidades de cada nodo en el instante  $t_{n+1}$  a partir de

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t [(1-\gamma)\mathbf{a}_{n+1} - \gamma\mathbf{a}_n] \quad (17a)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \mathbf{v}_n \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}] \quad (17b)$$

donde los parámetros  $\gamma$  y  $\beta$  permiten elegir entre los distintos miembros de esta familia de integradores. En el presente trabajo se ha utilizado  $\gamma=1$  y  $\beta=(1/2+\gamma)^2/4$ .

Introduciendo (17) en (16) obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas no lineal que se resuelve siguiendo el método de Newton-Raphson. El programa de cálculo utilizado fue IRIS [9] ejecutado en una estación de trabajo Compaq ES40.

## 4. RESULTADOS

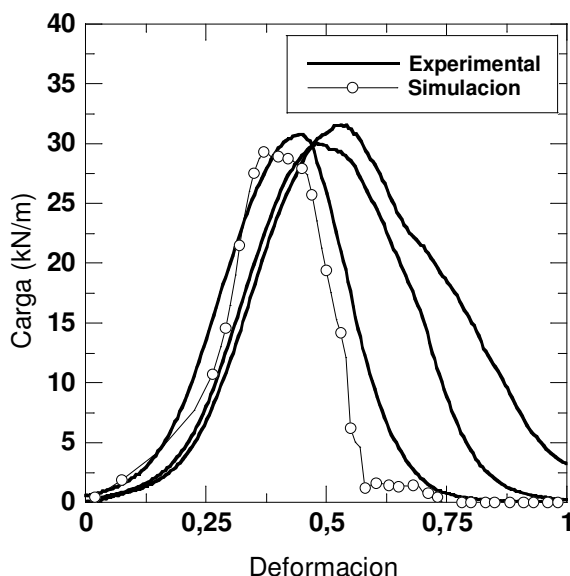
El modelo descrito más arriba se utilizó para simular la respuesta tensión-deformación de un fieltro real de fibras de polietileno de ultra-alto peso molecular (Dynema SK 75). Las fibras tenían longitud constante de  $L=70$  mm, módulo de elasticidad  $E=100$  GPa y  $\phi=20$   $\mu\text{m}$  de diámetro. La densidad de dicho tejido es de  $\rho_t=142$  Kg/m<sup>3</sup> con un espesor nominal aproximado de  $t=1.4$  mm por lo que el índice de cubrimiento es  $\bar{c}=0.15$ .

Las propiedades mecánicas de este tejido fueron obtenidas por Gálvez *et al.* [10] y mostraron una fuerte dependencia de la microestructura (orientación de las fibras) y del tamaño de la probeta ensayada. La Figura 5 muestra la curva carga-desplazamiento de varias probetas de tamaño  $B=0.05$  y  $H=0.1$  m cuando son sometidas a un estado de tracción uniaxial. Las deformaciones alcanzadas son grandes y llegan, bajo carga máxima, hasta el 40-50%. En este punto, las fibras comienzan a deslizar entre ellas hasta producirse la separación total del tejido a una deformación del 80%. Se ha comprobado experimentalmente que cuando las probetas tienen una longitud mayor de  $H>0.1$  m, la respuesta mecánica es esencialmente la misma habida cuenta que el mecanismo básico de disipación energética está controlado por la longitud de la fibra, ecuación (15). Sin embargo, cuando la probeta tiene pequeñas dimensiones y, gran parte de las fibras quedan amarradas por la presión ejercida por las mordazas, la respuesta es más rígida. Estos autores también observaron que el efecto de la orientación de la carga era importante. Las fibras están orientadas preferentemente en la dirección perpendicular a la del rollo de partida.

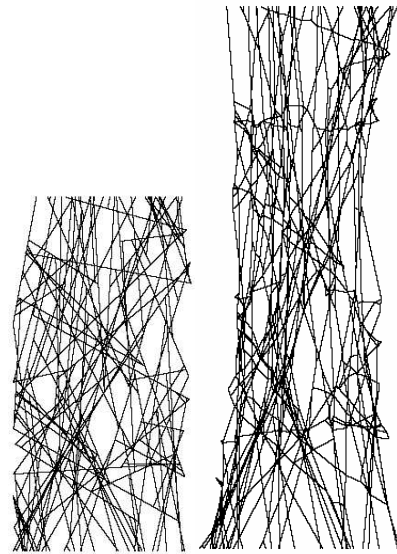
Se generaron varias retículas con fibras de igual longitud  $L=70$  mm depositadas sobre una superficie  $B=0.05$  y  $H=0.1$  m igual a la de las probetas ensayadas. De acuerdo con (3), 140000 nodos es el número medio de nodos que debe tener la retícula para alcanzar el grado de cubrición real del tejido. Como

compromiso entre la capacidad de cálculo y la duración de los mismos se prefirió reducir el tamaño del modelo generando redes con 150 fibras (1700 nodos-3000 barras y 5000 muelles). La longitud total media de fibra introducida en los modelos fue de  $L_f=5.3$  m que garantiza que el modelo supera los límites de percolación de acuerdo con la ecuación (1) aunque el grado de cubrición alcanzado es bastante inferior al real ( $\bar{c}=0.016$ ). Por simplicidad, se supuso que las fibras estaban orientadas de forma isótropa. El espesor de la retícula analizada fue igual a diámetro de fibra. La deformación se aplicó incrementalmente sobre el fieltro imponiendo a los nodos situados en la base superior un desplazamiento creciente en la dirección de carga mientras se mantuvieron fijos en todas las direcciones los nodos de la base inferior. La fuerza necesaria para deformar dicho tejido se obtuvo mediante el método de integración mostrado en 3.3. Dicha carga se multiplicó por el número de capas necesario para igualar la densidad de la retícula calculada y la densidad del fieltro real.

Los parámetros libres del modelo, la curvatura inicial de las fibras  $R$ , y los los parámetros  $\xi$  y  $T_0$  de la curva de deslizamiento de una fibra se determinaron para ajustar la curva obtenida a los resultados experimentales. Las predicciones numéricas obtenidas con dicho modelo y los resultados experimentales se han dibujado en la Figura 5. La forma campaniforme de la curva carga desplazamiento es reproducida con bastante aproximación. La Figura 6 muestra la geometría deformada de la retícula en el punto de carga máxima.



**Fig. 5.** Comparación de los resultados de la simulación numérica y los resultados experimentales.



**Fig. 6.** Geometría inicial y deformada bajo carga máxima de la retícula utilizada en las simulaciones.

### Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento a la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid por la financiación recibida a través del proyecto 07N/0012/2002.

### 6. REFERENCIAS

- [1] K.K. Chawla, en *Fibrous materials*, Cambridge Solid State Series (1998).
- [2] H.L. Cox, *British Journal of Applied Physics*, **3**, 72-79 (1952).
- [3] O. Kallmes y H. Corte, *Tappi*, **43**, 737-752 (1960).
- [4] S. Heyden, Tesis Doctoral. Lund University (2000).
- [5] C. González, J. Llorca, I. Romero., *Anales de Mecánica de Fractura*, **20**, 89-94 (2003).
- [6] J. A. Åström y K.J. Niskanen, *Europhys Lett.*, **21**, 557-562 (1993).
- [7] C. González, J. Llorca, I. Romero, manuscrito en preparación.
- [8] N.M. Newmark, *Journal of the Engineering Mechanics division.*, **85**, 67-94 (1956).
- [9] IRIS, Ignacio Romero. Departamento de Mecánica de Medios Continuos. Universidad Politécnica de Madrid.
- [10] F. Gálvez, S. Chocron, A. Pintor, V. Sánchez-Gálvez., *Anales de Mecánica de Fractura*, **19**, 147-152 (2002).