

# RELACIÓN ENTRE LAS MEDIDAS DE LA MIXICIDAD DE LOS MODOS DE FRACTURA EN LAS GRIETAS DE INTERFASE

V. Mantič y F. París

Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, Escuela Superior de Ingenieros  
Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092-Sevilla, España

**Resumen.** En este trabajo se considera el modelo elástico lineal de grietas de interfase entre dos materiales isótropos en deformación o tensión plana. Se presenta y analiza una nueva ecuación que relaciona las dos medidas de contribución relativa de los modos de fractura (llamada mixicidad). El ángulo de fase  $\psi_K$  del Factor de Intensificación de Tensiones complejo (FIT)  $K=|K|\exp(i\psi_K)$  define el cociente entre las tensiones tangencial y normal en la interfase a una distancia de referencia  $l$  suficientemente pequeña. El ángulo energético  $\psi_G$  está definido como  $\tan^2 \psi_G = G_{II}(\Delta a)/G_I(\Delta a)$ , donde  $G_I(\Delta a)$  y  $G_{II}(\Delta a)$  representan las componentes del índice de liberación de energía asociadas a los Modos I y II respectivamente para un avance virtual, pero finito, de la grieta  $\Delta a$ . Debido al carácter oscilatorio de la solución en el entorno del fondo de la grieta,  $\psi_K$  y  $\psi_G$  representan medidas de mixicidad de los modos de fractura que son  $l$ -dependiente y  $\Delta a$ -dependiente respectivamente. Se observa y estudia el carácter oscilatorio de  $G_I(\Delta a)$  y  $G_{II}(\Delta a)$ , que alcanzan valores negativos pequeños, no inicialmente esperables, para ciertos intervalos de  $\Delta a$ . Aplicando la ecuación obtenida se puede trabajar con las dos medidas de una manera prácticamente equivalente.

**Abstract.** Linear elastic open model of interface cracks between two isotropic materials is considered in the plane strain or plane stress state. A new simple equation relating the two measures of fracture mode mixity: the *local phase angle*  $\psi_K$  based on the Stress Intensity Factor (SIF) and the *energetic angle*  $\psi_G$  based on the Energy Release Rate (ERR), is presented and analysed. The phase angle  $\psi_K$  of the complex stress intensity factor  $K=|K|\exp(i\psi_K)$  defines the ratio of shear and normal tractions at the interface ahead of the crack tip at a small reference length  $l$ . The energetic angle  $\psi_G$  is defined by  $\tan^2 \psi_G = G_{II}(\Delta a)/G_I(\Delta a)$ , where  $G_I(\Delta a)$  and  $G_{II}(\Delta a)$  respectively represent opening and shear energy release rate components for a small but finite virtual crack extension  $\Delta a$ . Due to the oscillatory character of the near-tip solution,  $\psi_K$  and  $\psi_G$  represent measures of mode mixity which are  $l$ -dependent and  $\Delta a$ -dependent respectively. An oscillatory behaviour of  $G_I(\Delta a)$  and  $G_{II}(\Delta a)$  with unexpected slightly negative values for certain intervals of  $\Delta a$  is observed and studied. Applying the equation obtained it is now possible to work with both these measures in as near-equivalent a manner as possible.

## 1. INTRODUCCIÓN

En *el modelo abierto* de grietas de interfase, originalmente estudiado por Williams [1], las caras de la grieta se suponen libre de tensiones, como usualmente se asume para grietas en sólidos homogéneos. Un aspecto básico “inesperado” en la solución elástica en el entorno del vértice de la grieta de este modelo es que para un valor no nulo del parámetro de Dundurs de bimaternal  $\beta \neq 0$  las tensiones y desplazamientos comienzan a oscilar a medida que se aproximan al vértice de la grieta. Como consecuencia de estos desplazamientos oscilatorios, un número infinito de regiones donde las caras de la grieta se interpenetran y arrugan es predicho por esta solución.

Para salvar las inconsistencias anteriormente descritas del modelo abierto, Comninou [2] desarrolló *el modelo de contacto* de grietas de interfase. Comninou demostró que, permitiendo el contacto sin fricción entre las caras de la grieta, se obtiene una solución físicamente

correcta apareciendo una zona de contacto en el vértice de la grieta cuando  $\beta \neq 0$ . Típicamente la extensión de esta zona de contacto es menor que el tamaño de la zona de interpenetraciones en el modelo abierto (del orden del 55%).

El tamaño de las zonas donde se producen dichas interpenetraciones mecánicamente inadmisibles es a menudo físicamente no relevante, en ocasiones de escala atómica. Rice [3] introduce el concepto de zona de contacto a pequeña escala (*Small Scale Contact zone*, SSC) para caracterizar estas situaciones. Este concepto de SSC representa la base teórica de las aplicaciones del modelo abierto para las predicciones de crecimiento de grietas de interfase en muchos problemas [4] (despegues de revestimientos térmicos, grietas de delaminación en laminados, despegues entre fibra y matriz en materiales compuestos, etc.)

En el modelo abierto, una grieta de interfase, suponiendo  $\beta \neq 0$ , crece inherentemente en modo

mixto independientemente de la carga aplicada. En el entorno del fondo de la grieta existen, por un lado, en la zona pegada de la interfase, tanto tensiones normales como tangenciales, y por otro lado, entre los labios de la grieta existen tanto desplazamientos relativos normales como tangenciales. Para medir (en las configuraciones planas) la contribución relativa del Modo I (modo de abertura) y del Modo II (modo de cortadura), llamada en adelante la *mixicidad de los modos de fractura* (fracture mode mixity), se utilizan en la práctica ingenieril tradicionalmente los dos enfoques básicos de la Mecánica de la Fractura: el enfoque basado en el concepto del Factor de Intensificación de Tensiones (FIT) y el enfoque basado en el concepto de Índice de Liberación de Energía (G).

Mientras que la medida de la mixicidad de los modos de fractura basada en el FIT, *ángulo de fase local*  $\psi_K$ , se puede identificar fácilmente con el término singular del desarrollo asintótico de la solución elástica lineal del modelo abierto de grietas de interfase [3,4], la medida basada en el Índice de Liberación de Energía, *ángulo energético*  $\psi_G$ , se obtiene mediante unas integrales en variable compleja que en cierto grado ocultan la relación existente entre estas dos medidas. Aunque se han publicado varios trabajos previos al respecto de esta relación: Sun y Jih [5], Raju y otros [6], Toya [7], Beuth [8], Sun y Qian [9], Narayan y Beuth [10], es el reciente trabajo de los presentes autores [11] el que finalmente ha clarificado varios aspectos fundamentales de dicha relación, resumiéndose los resultados de este último trabajo en el artículo presente.

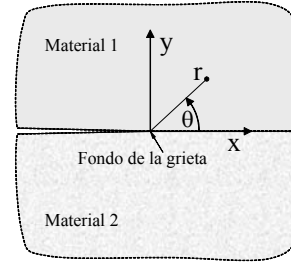
## 2. SOLUCIÓN ELÁSTICA SINGULAR EN EL MODELO ABIERTO

Las expresiones analíticas de tensiones y desplazamientos en el entorno del fondo de una grieta de interfase en bimetálicos isótropos están bien documentadas en la literatura [3,4]. Por tanto se presenta aquí sólo un resumen de las ecuaciones básicas que se necesitarán en las explicaciones posteriores.

Consideremos un sistema local cartesiano  $(x,y)$  y un sistema local polar  $(r,\theta)$  con el origen en el fondo de la grieta de interfase, como se muestra en la Fig. 1. El parámetro de Dundurs  $\beta$  de un bimetálico se define como:

$$\beta = \frac{G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)}, \quad |\beta| \leq 0.5, \quad (1)$$

donde  $G_k$  es el módulo elástico de cortadura y  $\kappa_k$  la constante de Kolosov del material  $k=1,2$ ,  $\kappa_k=3-4\nu_k$  y  $\kappa_k=(3-\nu_k)/(1+\nu_k)$  para deformación plana y tensión plana respectivamente, siendo  $\nu_k$  el coeficiente de Poisson. El parámetro  $\beta$  se anula en el caso de dos materiales idénticos, pero también se anula en estados de deformación plana para dos materiales incompresibles o un material incompresible y otro rígido.



**Fig. 1.** Sistema de coordenadas locales en el fondo de la grieta de interfase.

El índice de oscilación  $\varepsilon$  de un bimetálico se expresa en términos de  $\beta$  como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad |\varepsilon| \leq \frac{\ln 3}{2\pi} \cong 0.175. \quad (2)$$

De acuerdo al desarrollo en serie asintótico de Williams [1] las tensiones singulares en el entorno del vértice en el lado pegado de la interfase se aproximan mediante la expresión:

$$\sigma_{yy}(r, \theta) + i\sigma_{xy}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} \quad \text{para } r \rightarrow 0, \quad (3)$$

donde  $r$  es la distancia al fondo de la grieta,  $i = \sqrt{-1}$ , y  $K=K_1+iK_2$  es el FIT complejo asociado a una longitud de referencia  $l$  de acuerdo a la propuesta de Rice [3].  $K$  depende de la geometría y de la carga aplicada.

Los desplazamientos relativos entre los labios de la grieta  $\Delta u_i = u_i(r, \pi) - u_i(r, -\pi)$  se calculan para  $r \rightarrow 0$  como:

$$\Delta u_y(r) + i\Delta u_x(r) = \frac{8}{1+2i\varepsilon} \frac{K}{\cosh(\pi\varepsilon)E^*} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon}, \quad (4)$$

donde  $E^*$  es el valor promedio del módulo de Young definido como:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E'_1} + \frac{1}{E'_2} \right), \quad (5)$$

$E'_k = E_k / (1 - \nu_k^2)$  en deformación plana y  $E'_k = E_k$  en tensión plana, siendo  $E_k$  el módulo de Young.

## 3. MIXICIDAD DE LOS MODOS DE FRACTURA BASADA EN EL FIT

Para representar la mixicidad de los modos de fractura basada en el FIT se usa, por regla general, el ángulo local de fase  $\psi_K$  definido por el FIT complejo  $K=|K|\exp(i\psi_K)$ , ó para  $l$  suficientemente pequeño como:

$$\psi_K = \arg K = \arg \{ \sigma_{yy}(l, 0) + i\sigma_{xy}(l, 0) \} = \arg \{ \Delta u_y(l) + i\Delta u_x(l) \} + \arctan(2\varepsilon), \quad (6)$$

donde la función  $\arg$  representa el argumento (ángulo polar) de un número complejo. El módulo del FIT  $|K|$  es independiente de  $l$ . De acuerdo a (6),  $\psi_K$  es una medida de la mixicidad de los modos de fractura dependiente de la selección de  $l$ . En este sentido cuando  $l \rightarrow 0$  el FIT complejo está girando y sus componentes  $K_1$  y  $K_2$  están oscilando. En particular, (3) implica que los ángulos de fase asociados a diferentes longitudes de referencia  $l$  y  $\tilde{l}$  están relacionadas por, Rice [3]:

$$\tilde{\psi}_K = \psi_K + \varepsilon \ln(\tilde{l}/l). \quad (7)$$

En lo que sigue se dan algunas explicaciones adicionales en referencia a aplicaciones habituales de la definición (6) de  $\psi_K$  en la práctica. Es esperable, bajo las hipótesis de SSC, que una tensión de tracción actúe en la interfase a una distancia característica adecuadamente escogida  $r=l$  delante del vértice de grieta, es decir,  $\sigma_{yy}(l,0) > 0$ . De esta manera, es habitual asumir una elección de  $l$  que implique que  $\sigma_{yy}(l,0) > 0$  y también  $K_1 > 0$ , y consecuentemente,  $\psi_K$  se puede tomar como  $\pi/2 > \psi_K > -\pi/2$ . Según (7) el cambio del ángulo de fase local entre dos elecciones de  $l$  en un intervalo de escalas físicamente relevantes se puede considerar pequeño, incluso siendo despreciable cuando  $\varepsilon$  es lo suficientemente pequeño. Por tanto, la condición  $K_1 > 0$  se mantiene habitualmente en aplicaciones prácticas. En tal caso  $\psi_K$  podría ser también definido de modo inequívoco por el siguiente cociente:

$$\tan \psi_K = \frac{K_2}{K_1} = \frac{\sigma_{xy}(l,0)}{\sigma_{yy}(l,0)}. \quad (8)$$

#### 4. MIXICIDAD DE LOS MODOS DE FRACTURA BASADA EN EL ÍNDICE DE LIBERACIÓN DE ENERGÍA

El índice de liberación de energía de deformación debido a un avance de la grieta a lo largo de la interfase,  $G^{\text{int}}(\Delta a)$ , se puede evaluar usando el método clásico del cierre *virtual de la grieta* (originalmente desarrollado por Irwin para grietas en sólidos homogéneos) para el modelo abierto de grietas de interfase [5-8]. Consideremos primero un avance  $\Delta a$  de la grieta pequeño pero finito. Así pues:

$$G^{\text{int}}(\Delta a) = G_I^{\text{int}}(\Delta a) + G_{II}^{\text{int}}(\Delta a) \quad (9)$$

$$G_I^{\text{int}}(\Delta a) = \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_{yy}(r,0) \Delta u_y(\Delta a - r) dr, \quad (10)$$

$$G_{II}^{\text{int}}(\Delta a) = \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_{xy}(r,0) \Delta u_x(\Delta a - r) dr.$$

El índice de liberación de energía total  $G^{\text{int}}(\Delta a)$  converge (siendo incluso constante cuando se consideran sólo los términos singulares de (3) y (4)) para  $\Delta a \rightarrow 0$ . Evaluando  $G^{\text{int}}$  asociado a una extensión de

la grieta virtual infinitesimal mediante dicho límite se obtiene su expresión de tipo Irwin en función de  $K$  complejo [12]:

$$G^{\text{int}} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} G^{\text{int}}(\Delta a) = \frac{|K|^2}{\cosh^2(\pi\varepsilon)E^*}. \quad (11)$$

Como podría ser previsto,  $G^{\text{int}}$  sólo depende, al igual que en materiales homogéneos, de la magnitud del FIT  $K$  y no de su ángulo de fase  $\psi_K$ . El valor necesario de  $G^{\text{int}}$  bajo un  $\psi_K$  dado para que la grieta se propague, se denomina tenacidad de la interfase para esta mixicidad concreta de los modos de fractura,  $G_c^{\text{int}}(\psi_K)$ .

A continuación se estudiará la posibilidad de definir una medida de la mixicidad de los modos de fractura basada en el concepto del índice de liberación de energía.

Una evaluación analítica relativamente compleja de las integrales en (10) por separado, considerando sólo los términos singulares de (3) y (4) fue llevada a cabo en [5-8] mediante el uso de las funciones gamma o beta evaluadas para argumentos complejos. En el presente trabajo se profundizará en los resultados de Taya, siguiendo el desarrollo presentado en [11].

La naturaleza oscilatoria del campo elástico en el entorno del fondo de la grieta causa la oscilación de  $G_{I,II}^{\text{int}}(\Delta a)$  y, consecuentemente, sus límites no existen cuando  $\Delta a \rightarrow 0$ . Este comportamiento oscilatorio fue estudiado por varios autores [5-7]. Las nuevas expresiones explícitas de las componentes del índice de liberación de energía asociadas a  $\Delta a$ , considerando sólo los términos singulares en (3) y (4), han sido deducidas recientemente en [11], desarrollando un resultado de [7]:

$$G_{I,II}^{\text{int}} = 0.5 G^{\text{int}} [1 \pm F(\varepsilon) \cos(2(\psi_K + \psi_0))] \quad (12)$$

donde el signo positivo se refiere a  $G_I^{\text{int}}(\Delta a)$  y el signo negativo a  $G_{II}^{\text{int}}(\Delta a)$ . La función amplitud  $F(\varepsilon)$  y el ángulo de desfase  $\psi_0$  se determinan como:

$$F(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\sinh(2\pi\varepsilon)}{2\pi\varepsilon(1+4\varepsilon^2)}} = 1 + \left(\frac{\pi^2}{3} - 2\right)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \psi_0\left(\frac{\Delta a}{l}, \varepsilon\right) &= \varepsilon \ln\left(\frac{\Delta a}{2l}\right) + \varphi(\varepsilon) - \frac{\arctan(2\varepsilon)}{2} \\ &= \varepsilon \ln\left(\frac{\Delta a}{4el}\right) + \left(\zeta(3) + \frac{4}{3}\right)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5), \end{aligned} \quad (14)$$

donde

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \arg \left[ \frac{\Gamma(0.5 + i\varepsilon)}{\Gamma(1 + i\varepsilon)} \right] = -\varepsilon \ln 2 + \zeta(3)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5), \quad (15)$$

siendo  $\Gamma(\cdot)$  y  $\zeta(\cdot)$ , respectivamente, la función gamma y la función zeta de Riemann,  $\zeta(3)=1.2020569...$  la

constante de Apéry, y  $\varepsilon=2.718...$  la base del logaritmo natural.

Se define el ángulo energético  $\psi_G$  mediante el cociente de las componentes individuales del índice de liberación de energía, para un determinado  $\Delta a$  de la siguiente manera:

$$\tan^2 \psi_G = \frac{G_{II}^{int}(\Delta a)}{G_I^{int}(\Delta a)}. \quad (16)$$

Una consecuencia de las oscilaciones de  $G_{I,II}^{int}(\Delta a)$  según (12) es que  $\psi_G$  representa una *medida de la mixicidad de los modos de fractura* dependiente de  $\Delta a$ , aunque en un rango de los valores de  $\Delta a$  físicamente relevantes esta dependencia se puede considerar débil para valores  $\varepsilon$  pequeños. A la vista del cuadrado en el término izquierdo de (16) es razonable asumir  $0 \leq \psi_G \leq \pi/2$ , lo que se corresponde con el hecho de que el signo de las tensiones tangenciales no puede ser determinado a través del índice de liberación de energía. Cuando  $\varepsilon=0$ , y particularmente para una grieta en un material homogéneo,  $\psi_G=|\psi_K|$ .

Un aspecto relevante del comportamiento oscilatorio de  $G_{I,II}^{int}(\Delta a)$  de acuerdo a (12) está asociado a la siguiente propiedad de la función amplitud  $F(\varepsilon)$ , no inicialmente esperable, que se puede ver de su desarrollo en serie de Taylor en (13):

$$F(\varepsilon) > 1 \quad \text{para} \quad \varepsilon \neq 0. \quad (17)$$

Una consecuencia crucial de este hecho es que hay un número infinito de intervalos de valores de  $\Delta a$ , cuando  $\Delta a \rightarrow 0$ , donde una componente del índice de liberación de energía, bien  $G_I^{int}(\Delta a)$  o  $G_{II}^{int}(\Delta a)$ , es ligeramente negativa. Como se desprende del análisis de la función  $F(\varepsilon)$ , el valor negativo máximo de una componente del índice de liberación de energía es una función creciente de  $\varepsilon$  y es menor que el 2% de su valor total.

Aunque este comportamiento “extraño” de  $G_{I,II}^{int}(\Delta a)$  puede de hecho ser observado en Toya [7] (en la Fig. 2c allí, donde se ha tomado  $\varepsilon=0.1$ ), los autores no han sido capaces de encontrar ninguna referencia a este fenómeno ni en el trabajo original de Toya ni en trabajos de otros autores. La Fig. 2 ilustra este fenómeno para el valor máximo de  $\varepsilon=0.175$  en escalas logarítmica y estándar de  $\Delta a/l$  tomando  $K=1$ , y  $\psi_K$  siendo por lo tanto igual a cero.

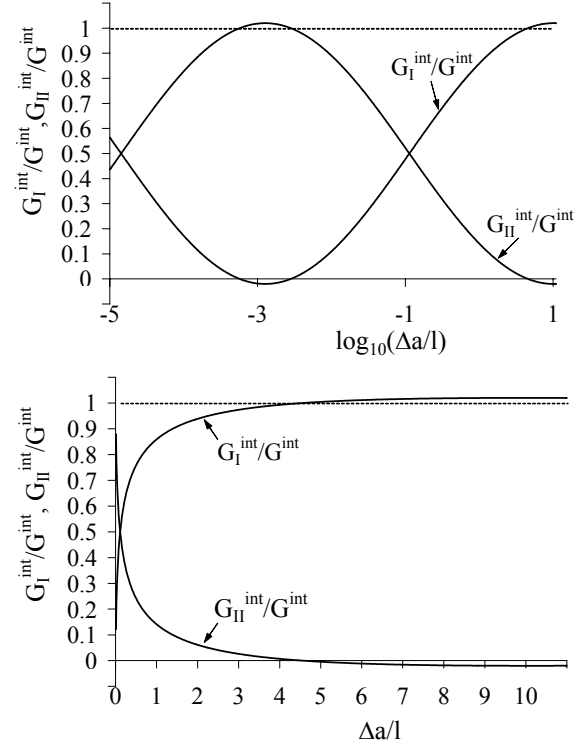
El ángulo de desfase  $\psi_0(\Delta a/l, \varepsilon)=0$  cuando:

$$\frac{\Delta a}{l} = 2 \exp \left[ \frac{0.5 \arctan(2\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \right], \quad (18)$$

lo que da el siguiente intervalo para dichos valores de  $\Delta a/l$ :

$$10.1169 < \frac{\Delta a}{l} < 10.8731, \quad (19)$$

cuyos límites superior e inferior se obtienen para los valores extremos  $\varepsilon=0.175$  y  $\varepsilon=0$  respectivamente. Por tanto, el valor de  $\Delta a/l$  que da un ángulo de desfase nulo es bastante independiente de  $\varepsilon$ .



**Fig. 2.** Variación de los índices de liberación de energía con la longitud de avance virtual de la grieta  $\Delta a$ .

Para ilustrar ahora el comportamiento de las tensiones y los desplazamientos relativos que aparecen en (10) los cuales proporcionan un valor negativo de una componente del índice de liberación de energía, la Fig. 3 muestra dichas tensiones y desplazamientos relativos para una situación definida por los siguientes parámetros:  $K=1$  (por tanto  $\psi_K=0$ ),  $l=1$ ,  $\varepsilon=0.175$ ,  $E^*=1$ , y siendo elegido  $\Delta a/l=10.1169$  según (18-19). Entonces,  $G_{II}^{int}(\Delta a)/G_I^{int}(\Delta a)=-0.019563$ . Por tanto, el signo diferente que las tensiones y los correspondientes desplazamientos relativos pueden tener a ambos lados del vértice de la grieta de interfase es responsable del valor negativo de bien  $G_I^{int}(\Delta a)$  o  $G_{II}^{int}(\Delta a)$ , siendo el último el caso presentado en la Fig. 3b.

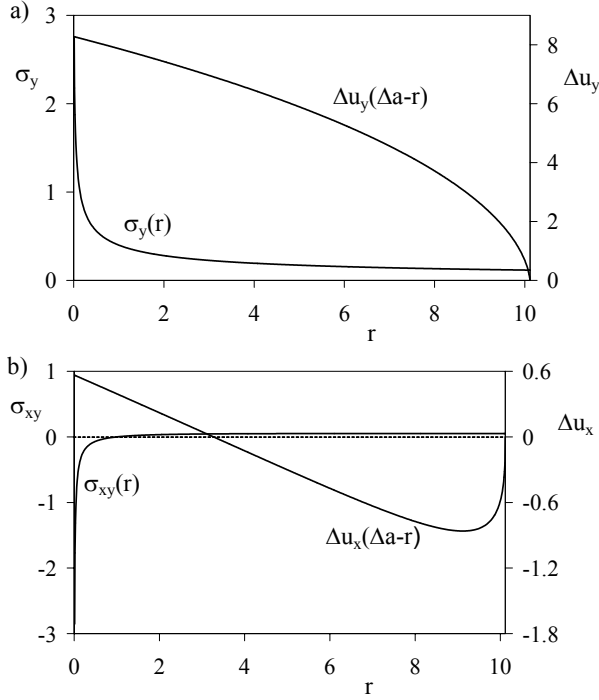
La relación buscada entre  $\psi_G$  y  $\psi_K$ , el resultado fundamental del presente trabajo, se obtiene sustituyendo (12) en (16):

$$\cos(2\psi_G) = F(\varepsilon) \cos\{2(\psi_K + \psi_0(\Delta a/l, \varepsilon))\}, \quad (20)$$

que implica que

$$\begin{aligned}\psi'_K &= 0.5 \arccos\{F(\varepsilon)^{-1} \cos(2\psi_G)\}, \\ \psi_G &= 0.5 \arccos\{F(\varepsilon) \cos(2(\psi_K + \psi_0))\},\end{aligned}\quad (21)$$

donde  $\psi'_K = |\psi_K + \psi_0 + n\pi|$  siendo  $n$  un número entero (usualmente  $n=0, 1, -1$ ) dando  $0 \leq \psi'_K \leq \pi/2$ . Nótese que en una situación típica  $K_I > 0$  y equivalentemente  $-\pi/2 < \psi_K < \pi/2$ . Si, además,  $\Delta a$  y  $l$  se eligen de acuerdo a (18) entonces  $\psi'_K = |\psi_K|$ .

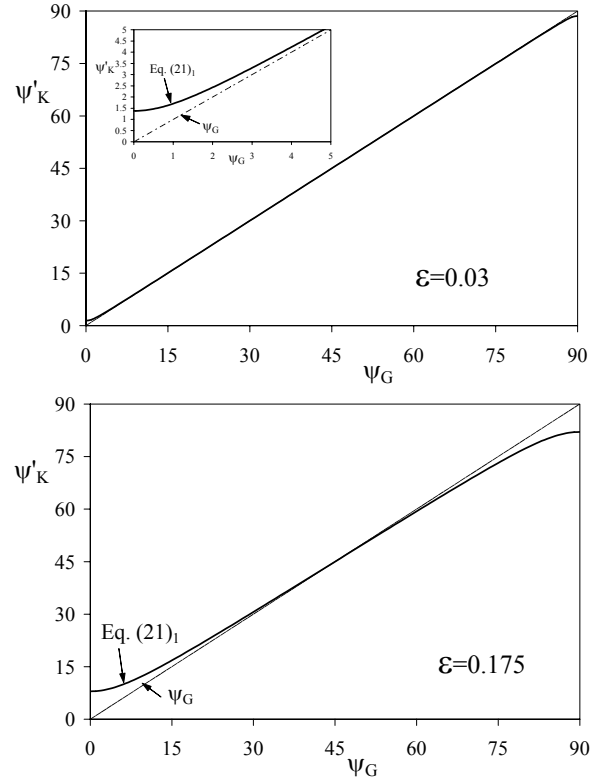


**Fig. 3.** Variación de las tensiones y los desplazamientos relativos correspondientes a una longitud de cierre virtual de grieta.

Como se ve de las explicaciones anteriores, las ecuaciones (21) demuestran que existe una relación relativamente simple entre las medidas de la mixicidad de los modos de fractura basados en el FIT y el índice de liberación de energía. Para ilustrar esta relación, la Fig. 4 representa  $\psi'_K$  como una función de  $\psi_G$  para dos valores del índice de oscilación  $\varepsilon$ , uno un valor relativamente pequeño pero aun mayor que el valor de  $\varepsilon$  para muchos bimetálicos utilizados en la práctica, 0.03, y el otro dado por el máximo valor 0.175 para bimetálicos isótropos. Como se puede apreciar en dicha figura, los valores de  $\psi'_K$  son relativamente bien aproximados por los valores de  $\psi_G$  exceptuando zonas donde  $\psi_G$  es cercano a 0 o  $\pi/2$ . Esto es cierto en particular para valores pequeños de  $\varepsilon$ .

Sin embargo, se puede observar un comportamiento “extraño” en la Fig. 4: hay valores de  $\psi'_K$  que no tienen un valor real correspondiente de  $\psi_G$ . De hecho, los valores de  $\psi_G$  correspondientes a estos valores de  $\psi'_K$  son números imaginarios puros o complejos puesto

que en tal situación  $G_I^{\text{int}}(\Delta a)$  o  $G_{II}^{\text{int}}(\Delta a)$  es negativa, y consecuentemente, a la vista de (16),  $\tan^2 \psi_G < 0$ . En tal situación  $|\text{Im} \psi_G| = 0.5 \text{arccosh} |\cos(2\psi_G)|$ , y  $\text{Re} \psi_G = 0$  para  $-1 < \tan^2 \psi_G < 0$  y  $\text{Re} \psi_G = \pi/2$  para  $\tan^2 \psi_G < -1$ . En el caso particular representado en la Fig. 3, el ángulo energético  $\psi_G$  viene dado por un número imaginario,  $\psi_G = i0.140792$ . Otros detalles de este comportamiento y también otros aspectos de la relación entre  $\psi_G$  y  $\psi_K$  se presentan y discuten en [11].



**Fig. 4.**  $\psi'_K$  como una función de  $\psi_G$ .

#### 4. CONCLUSIONES

El presente estudio representa una contribución a la clarificación de una dualidad natural existente entre conceptos asociados al Factor de Intensificación de Tensiones (FIT) y al Índice de Liberación de Energía del modelo abierto de la Mecánica de la Fractura de interfase. Por un lado, el módulo del FIT  $|K|$  y el índice de liberación de energía  $G^{\text{int}}$  asociado a un avance infinitesimal de la grieta están definidos de forma unívoca, quedando su equivalencia establecida por la expresión (11). Por otro lado, las componentes  $K_I$  y  $K_{II}$  del FIT, y las componentes  $G_I^{\text{int}}(\Delta a)$  o  $G_{II}^{\text{int}}(\Delta a)$ , son respectivamente funciones periódicas oscilatorias de los logaritmos de la longitud de referencia  $l$  y de la extensión virtual de la grieta  $\Delta a$ . Una forma natural de relacionar las mixicidades asociadas a dichos conceptos es a través de los ángulos  $\psi_K$  y  $\psi_G$ . Cuando  $l$  y  $\Delta a$  se definen de forma independiente, se puede esperar un

cierto desfase entre  $\psi_K$  y  $\psi_G$  como una función de  $l$  y  $\Delta a$ . Adicionalmente, este desfase debería ser una función del índice de oscilación  $\varepsilon$  (recordemos que no hay desfase cuando  $\varepsilon=0$ ). Una nueva ecuación (20) refleja los aspectos anteriores de la relación entre  $\psi_K$  y  $\psi_G$  en una forma simple y explícita.

Una vez clarificada la relación entre ambas medidas de la mixicidad de los modos de fractura,  $\psi_K$  y  $\psi_G$ , se pueden hacer unos comentarios referentes a la aplicabilidad de esta relación. La relevancia de esta relación en la práctica está asociada al hecho de que estos ángulos son parámetros clave en la caracterización de la tenacidad a fractura interfacial  $G_c^{\text{int}}$  [4], la cual en diferentes aplicaciones es típicamente dada como una función de un ángulo particular (por ejemplo:  $\psi_G$  es usualmente usado en la caracterización de materiales compuestos).

Cuando  $\psi_G$  es evaluado usando (16) y las dos componentes del índice de liberación de energía asociadas a una extensión virtual de la grieta  $\Delta a$  son positivas, entonces  $\psi'_K$  puede ser directamente evaluado a través (21)<sub>1</sub>. Además, se ha probado que la relación  $\psi_G \approx \psi'_K$  puede ser usada como una aproximación razonable, excepto para valores extremos de  $\psi_G$  cercanos a 0 y  $\pi/2$ , donde una diferencia máxima de alrededor de 8 grados puede aparecer, aunque típicamente la diferencia será alrededor de 1 grado o menos. Una vez se ha obtenido un valor de  $\psi'_K$ , basta con alguna información adicional, con referencia al signo de las componentes de las tracciones en el fondo de grieta o de los desplazamientos relativos de los labios de la grieta a la distancia de referencia  $l$ , para, en vista de (6), determinar  $\psi_K$  (véase [9,10], para propuestas similares).

El presente trabajo identifica, en la medida de lo posible, ambas medidas de la mixicidad de los modos de fractura en el marco del modelo abierto de grietas de interfase en sistemas bimateriales isótropos. En este sentido, los presentes resultados justifican una aplicación de  $\psi_G$  como una medida válida de la mixicidad de los modos de fractura, aunque se requiere un cierto cuidado en casos extremos debido a algunas propiedades particulares de  $\psi_G$ . Sin embargo, se requiere una investigación más profunda para dar una explicación física del fenómeno observado de valores ligeramente negativos de las componentes individuales de la energía unitaria liberada cuando dichas componentes son evaluadas para ciertas extensiones finitas de grietas de interfase.

## AGRADECIMIENTOS

El estudio está financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (Ref. MAT2000-1115 y MAT2003-03315).

## REFERENCIAS

- [1] Williams, M.L., "The stress around a fault of crack in dissimilar media", Bull. Seismol. Soc. Am., 49, 199-204 (1959).
- [2] Comninou, M., "The interface crack", J. Appl. Mech., 44, 631-636 (1977).
- [3] Rice, J.R., "Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks", J. Appl. Mech., 55, 98-103 (1988).
- [4] Hutchinson, J.W. y Suo, Z., "Mixed mode cracking in layered materials", Advances in Appl. Mech., 29, 63-191 (1992).
- [5] Sun, S.T. y Jih, C.J., "On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media", Eng. Fract. Mech., 28, 13-20 (1987).
- [6] Raju, I.S., Crews, J.H. y Aminpour, M.A., "Convergence of strain energy release rate components for edge-delaminated composite laminates", Eng. Fract. Mech., 30, 383-396 (1988).
- [7] Toya, M., "On mode I and mode II energy release rates of an interface crack", Int. J. Fracture, 56, 345-352 (1992).
- [8] Beuth, J.L., "Separation of crack extension modes in orthotropic delamination models", Int. J. Fract., 77, 305-321 (1996).
- [9] Sun, S.T. y Qian, W., "The use of finite extension strain energy release rates in fracture of interfacial cracks", Int. J. Solids Structures, 34, 2595-2609 (1997).
- [10] Narayan, S.H. y Beuth, J.L., "Designation of mode mix in orthotropic composite delamination problems", Int. J. Fract., 90, 383-400 (1998).
- [11] Mantič, V. y París, F., "Relation between SIF and ERR based measures of fracture mode mixity in interface cracks" (enviado para publicación).
- [12] Malyshev, B.M. y Salganik, R.L., "The strength of adhesive joints using the theory of cracks", Int. J. Fract., 4, 114-128 (1965).