

UN MODELO DE CRECIMIENTO DE GRIETA COMPATIBLE CON EL CAMPO DE WÖHLER

A. Fernández Canteli¹, E. Castillo², D. Siegele³

¹Dpto. de Construcción e Ingeniería de Fabricación, E.P.S.I.G.
Universidad de Oviedo, Campus de Viesques, 33203 Gijón, España.
E-mail: afc@uniovi.es

²Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, E.T.S.I.C.C.P.
Universidad de Cantabria, Avda. de los Castros s/n 38008 Santander, España.
E-mail: castie@unicani.es

³Fraunhofer Institut für Werkstoffmechanik
Wöhlerstrasse 11, 70108 Freiburg i. B., Alemania
E-mail: si@iwf.fhg.de

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un modelo dimensionalmente congruente que reproduce la curva completa de velocidad de crecimiento de grieta. El modelo considera un rango del factor de intensidad de tensiones normalizado ΔK^{**} , definido en el dominio $[0, 1]$, que puede interpretarse como una función de distribución, aprovechando la experiencia estadística sobre este tipo de funciones, particularmente en lo relativo a los métodos de estimación de parámetros. Por otro lado, se aplica un transcendental teorema que posibilita relacionar entre sí las curvas de crecimiento de grieta $a-N$ obtenidas para diferentes rangos de tensión $\Delta\sigma$ y longitudes iniciales de grieta a_0 , permitiendo derivar las curvas $S-N$ en función del tamaño inicial de grieta a partir de curvas de velocidad de crecimiento de grieta y probando la relación existente entre el modelo basado en tensiones y el basado en la mecánica de fractura. El modelo se aplica a un conjunto de datos experimentales de un cierto acero aleado obteniéndose las curvas de velocidad de crecimiento de grieta y de curvas $S-N$ para su posterior aplicación en la evaluación práctica de vida de fatiga en estructuras y elementos mecánicos.

PALABRAS CLAVE: Curvas de velocidad de crecimiento de grietas, Campo S-N, modelo de Gumbel

ABSTRACT

In this work, a dimensionally congruent model is developed to reproduce the complete crack growth rate curve. The model considers a normalized stress intensity factor range ΔK^{**} defined in the domain $[0, 1]$ that can be interpreted as a cumulative distribution function, thus taking advantage of the statistical experience inherent to this type of functions, in particular, in what concerns the parameter estimation methods. Beside this, a relevant theorem is then used showing the possibility of deriving crack growth curves $a-N$ for different stress ranges $\Delta\sigma$ and initial crack lengths a_0 from a unique reference curve. Thus, the $S-N$ curves can be derived from the crack growth rate curves as a function of the initial crack size proving the close relation between the stress based model and that based on the fracture mechanics. The model is applied to a set of experimental data from a certain steel alloy allowing us the derivation of crack growth rate curves and $S-N$ curves for subsequent application in the practical assessment of the fatigue life of structures and mechanical elements.

KEY WORDS: Crack growth rate curves, S.N field, Gumbel model

1. INTRODUCCIÓN

La relación entre velocidad de crecimiento de grieta y el rango del factor de intensidad de tensiones $da/dN = C\Delta K^m$ propuesta por Paris-Erdogan [1], ha supuesto una meritoria contribución en la evaluación de vida a fatiga de componentes agrietados. De ella han surgido innumerables publicaciones que han introducido mejoras en lo relativo al rango de aplicabilidad da/dN , relación de tensiones $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$, referencia del límite elástico y consideración de efectos plásticos de cierre de grieta

[2,3]. Todas ellas proponen algún tipo de función analítica para representar la curva de crecimiento de grieta mediante adecuado algoritmo. Otros modelos propugnan, desde su inicio, el empleo consecuente de variables y parámetros adimensionales [4]. La consideración de una posible relación entre las curvas de crecimiento de grieta y el campo $S-N$ o $\varepsilon-N$ se plantea sólo excepcionalmente y, en todo caso, desde modelos inspirados en la ley de Paris [5].

En este trabajo se propone un nuevo modelo basado en el análisis dimensional y en propiedades específicas de la curva $da/dN - \Delta K$. La propuesta de un rango del

factor de intensidad de tensiones normalizado ΔK^{*+} definido en el dominio $[0, 1]$ permite la consideración de la curva como función de distribución f.d.d., aprovechando la experiencia estadística con este tipo de funciones, particularmente en lo relativo a los métodos de estimación de parámetros a partir de los resultados experimentales. Tras la integración de la ecuación diferencial se prueba, mediante un importante teorema, que si la dependencia del factor de intensidad de tensiones respecto a geometría y carga puede ser descrita mediante unas determinadas familias de funciones, cualquier curva de crecimiento de grieta, correspondiente a una grieta inicial a_0 y un rango de tensión $\Delta\sigma$, queda definida a partir de una única solución particular, o curva de referencia, lo que constituye una alternativa a modelos basados en auto-similaridad. De este modo es posible establecer una relación entre las curvas de crecimiento de grieta y el campo de Wöhler, permitiendo una propuesta unificada para el análisis de fatiga en elementos y estructuras.

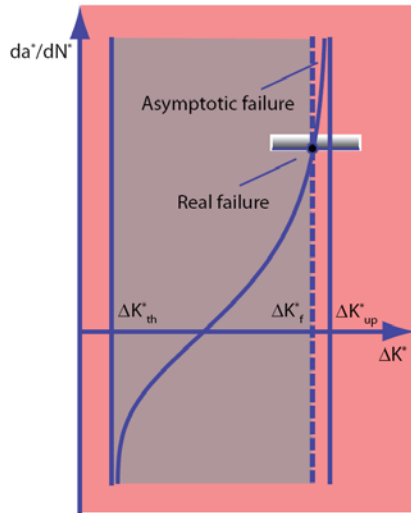


Figura 1. Curva de velocidad de crecimiento de grieta

2. EL MODELO PROPUESTO

De acuerdo con investigaciones previas [6-8] la dependencia del tamaño de grieta puede definirse, simplifícadamente mediante la relación

$$a^*(N^*) = q_1(a_0^*, \Delta K^*(a^*(N^*)), \Delta K_{th}^*, \Delta K_{up}^*), \quad (1)$$

en la que

$$a^* = a/W, a_0^* = a_0/W, N^* = N/N_0, \Delta K_{th}^* = \Delta K_{th}/K_c$$

$\Delta K_{up}^* = \Delta K_{up}/K_c$ con los significados siguientes: a , tamaño de grieta, a_0 , tamaño inicial de grieta, W , anchura de probeta, N , número de ciclos, N_0 , número de ciclos de referencia, ΔK_{th} , rango umbral del factor de intensidad de tensiones, ΔK_{up} , rango límite del factor de intensidad de tensiones y K_c , tenacidad a fractura característica del material.

Derivando (1) se obtiene

$$\frac{da^*(N^*)}{dN} = q_2(\Delta K^*(a^*(N^*)), \Delta K_{th}^*, \Delta K_{up}^*); \quad a^*(0) = a_0^* \quad (2)$$

de la que la ley de Paris es una simplificación. Las curvas de crecimiento de grieta se pueden obtener por integración de la ecuación (2), que representa una solución determinista para una geometría de probeta y tamaño dados de un determinado material bajo condiciones fijas de ensayo (relación de tensiones $R^* = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ y rango de tensiones adimensional $\Delta\sigma^*$).

2.1 Establecimiento del modelo

En el modelo se consideran dos posibles mecanismos de rotura competitivos, el debido a un crecimiento estable de grieta y el asociado con la propagación inestable de grieta (fig.1), que es el determinante en la práctica. Esto conduce a la consideración de un valor asintótico superior, ΔK_{up}^* , que con el valor asintótico inferior, o umbral, ΔK_{th}^* marcan el rango de existencia teórica de ΔK^* . De acuerdo con ello se define la variable

$$\Delta K^{*+} = \frac{\log \Delta K^* - \log \Delta K_{th}^*}{\log \Delta K_{up}^* - \log \Delta K_{th}^*}, \quad (3)$$

que toma valores en el intervalo $[0,1]$ y es monótonicamente creciente en la función (2), lo que permite interpretarla como la inversa de una función de distribución F , en particular:

$$\begin{aligned} \log \frac{da^*(N^*)}{dN} &= F^{-1}(\Delta K^{*+}(a^*(N^*))) = H(\Delta K^*(a^*(N^*))) \\ &= H(\Delta\sigma^* Y^*(a^*(N^*))) \sqrt{\pi a^*(N^*)} = H(\Delta\sigma^* Z(a^*(N^*))), \end{aligned} \quad (4)$$

en la que

$$H(\Delta K^*) = F^{-1} \left[\frac{\log \Delta K^* - \log \Delta K_{th}^*}{\log \Delta K_{up}^* - \log \Delta K_{th}^*} \right] \quad (5)$$

y

$$Z(a^*(N^*)) = Y^*(a^*(N^*)) \sqrt{\pi a^*(N^*)}, \quad (6)$$

con lo que

$$\frac{da^*(N^*)}{dN} = \exp[H(\Delta\sigma^* Z(a^*(N^*)))] = V(\Delta\sigma^* Z(a^*(N^*))). \quad (7)$$

La forma de la curva de velocidad de crecimiento de grieta identificada como una función de distribución, es atribuible a los cambios microestructurales continuos que se suceden en el material durante todo el proceso de fatiga. En este caso se aprovecha la experiencia acumulada en el estudio de las f.d.d. y en los métodos de estimación de parámetros en el análisis del crecimiento de grieta para reproducir no sólo la zona lineal de Paris, sino el conjunto de curva de velocidad de crecimiento de grieta.

2.2 Solución de la ecuación diferencial

La ecuación diferencial (7) permite obtener la curva de crecimiento de grieta $a^*(N^*)$ en función de N^* para la condición inicial $a^*(0) = a_0^*$ cuando el rango de tensión $\Delta\sigma^* = \Delta\sigma_0^*$ permanece constante. Entre las deducciones teóricas desarrolladas en [9], se demuestra un teorema, según el cual si $a_0^*(N^*)$ representa la solución de la ecuación diferencial (7) para $\Delta\sigma^* = \Delta\sigma_0^*$ y $a^*(0) = a_0^*$ y la función $Z(a^*(N^*))$ presenta una de las formas siguientes:

$$Z(a^*) = \begin{cases} T \exp(U a^*) \\ (Q a^* + T)^V \end{cases}, \quad (8)$$

en la que T, U, Q y V son constantes arbitrarias, el tamaño de grieta $a^*(N^*)$ tras N^* ciclos para cualquier combinación $\Delta\sigma^* = \Delta\sigma_l^*$ y $a^*(0) = a_l^*$, viene dado por la expresión

$$a^*(N^*) = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} Z \left[a_0^* \left(\rho^k N^* + a_0^{*-1} (Z^{-1}(\rho Z(a_l^*))) \right) \right] \right\} \quad (9)$$

donde $\rho = \frac{\Delta\sigma_l^*}{\Delta\sigma_0^*}$.

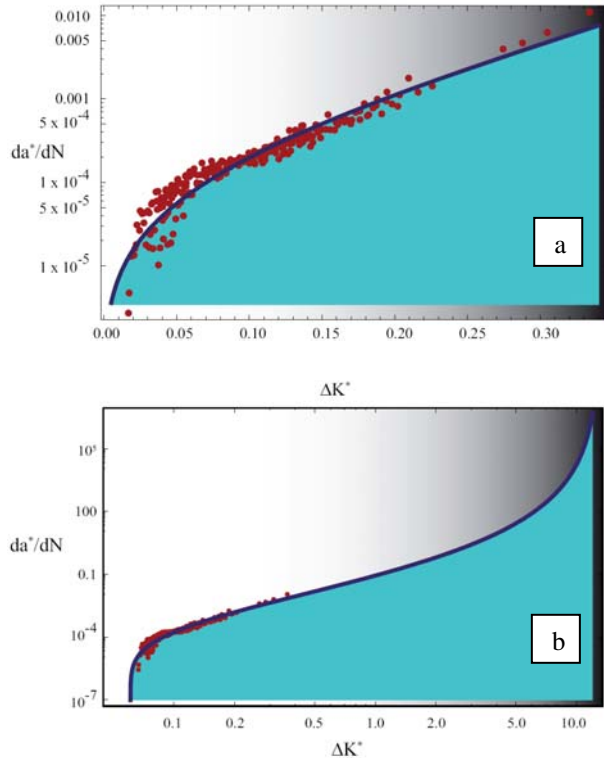


Figura 2. Resultados experimentales y ajuste del modelo de velocidad de crecimiento de grieta.

2.3 El modelo de Gumbel

Dentro de las posibles funciones de distribución a elegir para el modelo, se considera conveniente la de Gumbel para máximos:

$$F(x) = \exp \left[-\exp \left(\frac{\alpha - x}{\gamma} \right) \right]; \quad \gamma > 0 \quad (10)$$

lo que conduce al modelo

$$\begin{aligned} \left[\frac{\log \Delta K^* - \log \Delta K_{th}^*}{\log \Delta K_{up}^* - \log \Delta K_{th}^*} \right] &= F \left(\log \frac{da^*}{dN^*} \right) \\ &= \exp \left[-\exp \left(\frac{\alpha - \log \frac{da^*}{dN^*}}{\gamma} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

dependiente de cuatro parámetros: $\alpha, \gamma, \Delta K_{th}^*$ y ΔK_{up}^* .

2.4 Estimación de los parámetros del modelo

En este caso, dado que las magnitudes observadas son deterministas, no está justificado el método de máxima verosimilitud, por lo que se aplica la técnica de mínimos cuadrados, en particular

$$\text{Minimize}_{\alpha, \gamma, \Delta K_{th}^*, \Delta K_{up}^*} Q(\alpha, \gamma, \Delta K_{th}^*, \Delta K_{up}^*), \quad (12)$$

donde $Q(\alpha, \gamma, \Delta K_{th}^*, \Delta K_{up}^*)$ viene dado por

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \log \Delta K_i^* - \log \Delta K_{th}^* - (\log \Delta K_{up}^* - \log \Delta K_{th}^*) \exp \left[-\exp \left(\frac{\alpha - \alpha_i^*}{\gamma} \right) \right] \right\}^2 \quad (13)$$

siendo $\alpha_i^* = \frac{da^*}{dN^*}$ y $\Delta K_i^*, i = 1, 2, \dots, n$ los puntos de los datos.

2.5 Ejemplo de aplicación

Como ilustración se presenta la aplicación del modelo a un caso práctico, en el que se tratan los resultados experimentales obtenidos en el Fraunhofer IWM para un determinado acero estructural. Para la determinación de los resultados relativos a la curva de velocidad de crecimiento de grieta se utilizaron probetas del tipo CCT [9].

Se consideraron como variables de normalización:

$$\begin{aligned} N_0 &= 1000 \text{ ciclos}, D = W = 24 \text{ mm}, B = 10 \text{ mm}, \\ K_c &= 200 \text{ MPa m}^{1/2}, \end{aligned}$$

obteniéndose, tras la minimización de la función (11), siguientes valores estimados de los parámetros

$$\begin{aligned} \alpha &= -4.5155, \gamma = 4.8092, \log \Delta K_{th}^* = -2.7981, \\ \log \Delta K_{up}^* &= 2.5709, \end{aligned} \quad (14)$$

es decir, $\Delta K_{th} = 12 \text{ MPa m}^{1/2}$, $\Delta K_{up} = 2615 \text{ MPa m}^{1/2}$.

En la fig. 2 se representan los datos experimentales para el material ensayado y la curva de velocidad de crecimiento de grieta $da^*/dN^* - \Delta K^*$ ajustada, que muestran una buena concordancia. Como consecuencia de la concentración de datos en la parte inferior de la curva y la práctica carencia en su parte superior, el valor de ΔK_{up}^* no resulta creíble. Una solución conservadora se puede alcanzar imponiendo inicialmente $\Delta K_{up}^* = \Delta K_f^*$, donde ΔK_f^* corresponde al crecimiento inestable de grieta, determinado al alcanzarse $K_{max}^* = K_c^*$.

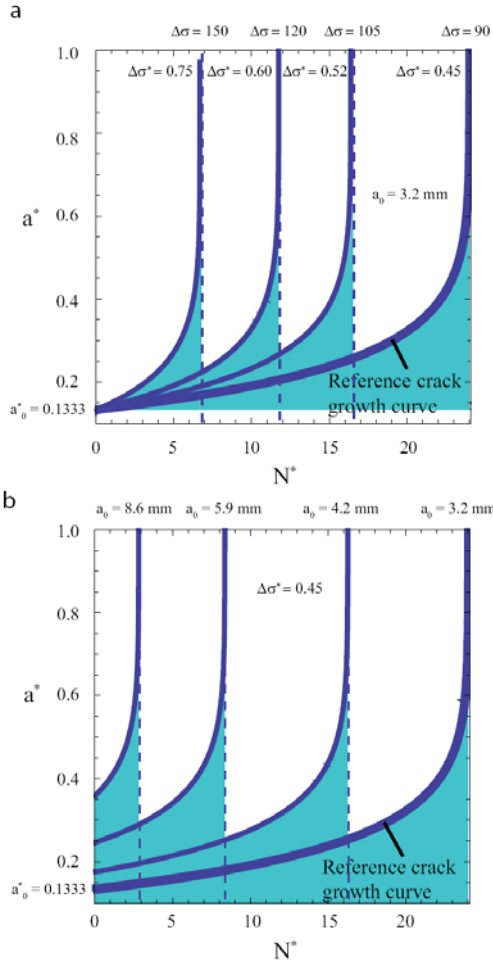


Figura 3. Curvas de crecimiento de grieta resultantes de la aplicación de (8).

En la fig. 3, se muestra la curva de crecimiento de grieta de referencia, obtenida para $\Delta\sigma = 90 \text{ MPa}$ y $a = 3.2 \text{ mm}$ tras la integración de la ecuación (7) mediante el procedimiento *Dsolve* de Mathematica, basado en el método Runge-Kutta. A partir de esta solución se puede determinar la curva de crecimiento de grieta para cualquier condición de carga y tamaño inicial de grieta, tal como se desprende de la figura 3a, en la que se representan, junto a la curva de referencia, las curvas resultantes de aplicar la ecuación (9) a los casos $\Delta\sigma = 105, 120$ y 150 MPa para un mismo tamaño

inicial de grieta. De manera similar, la figura 3b recoge las curvas de crecimiento de grieta para el mismo rango de tensión $\Delta\sigma = 90 \text{ MPa}$ y diferentes tamaños iniciales de grieta $a = 3.2, 4.2, 5.9$ y 8.6 mm .

3. CRECIMIENTO DE GRIETA Y CURVAS S-N

La trascendencia del teorema mencionado en el apartado 2.2, queda patente al permitir la obtención de curvas S-N, en el sentido de vida remanente a fatiga, a partir de las curvas de crecimiento de grieta. Si se considera un tamaño inicial de grieta aleatorio, representado por A_0^* , la relación entre el tamaño final de la grieta a_f^* y el número de ciclos hasta la rotura viene dada por:

$$a_f^*(N_f^*) = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} Z \left[a_0^* \left(\rho^k N_f^* + a_0^{*-1} \left(Z^{-1}(\rho Z(A_0^*)) \right) \right) \right] \right\}, \quad (15)$$

que permite, a su vez, calcular el tamaño inicial de la grieta en función de la vida a fatiga mediante

$$A_0^* = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} Z \left[a_0^* \left(a_0^{*-1} \left[Z^{-1}(\rho Z(a_f^*)) \right] - \rho^k N_f^* \right) \right] \right\}, \quad (16)$$

en la que a_f^* se determina a través de la condición de fractura bajo propagación inestable estática

$$a_f^* = \frac{I}{(Y^*(a_f^* \sigma_{max}^*)^2 \pi)}. \quad (17)$$

En este caso, optando por la segunda variante de (8), se obtiene

$$Z(a^*) = (Qa^* + T)^V = (0.126115617a^* + 0.9701834)^{30}, \quad (18)$$

cuyos coeficientes se estimaron mediante el método de los mínimos cuadrados, permitiendo un ajuste prácticamente perfecto de la expresión clásica

$$Z(a^*) = Y^*(a^*) \sqrt{a^*} = \sec(\pi a^*) (1 - 0.025(2a^*)^2 + 0.06(2a^*)^4) \sqrt{\pi a^*}$$

propuesta en los textos clásicos [10]. Con ello queda justificada la forma requerida en (8) y, en consecuencia, garantizada la condición de aplicabilidad del teorema, al menos en el presente caso.

Si se define a_p^* como el tamaño de grieta asociado al percentil p , el campo S-N probabilístico vendrá dado por

$$a_p^* = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} Z \left[a_0^* \left(a_0^{*-1} \left[Z^{-1}(\rho Z(a_f^*)) \right] - \rho^k N_f^* \right) \right] \right\} \quad (19)$$

$$= F_{A_0^*}^{-1}(1-p)$$

o, respectivamente,

$$N_f^* = \frac{a_0^{*-1} \left[Z^{-1}(\rho Z(a_f^*)) \right] - a_0^{*-1} \left[Z^{-1}(\rho Z(a_p^*)) \right]}{\rho^k}, \quad (20)$$

que representa la ecuación de la curva percentil p en el campo S-N para una grieta inicial a_p^* .

4. RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN CORRESPONDIENTES A LA LONGITUD DE GRIETA Y VIDA EN FATIGA

En esta sección se muestra cómo derivar la f.d.d. del tamaño de la grieta inicial o la f.d.d. de la vida en fatiga para un $\Delta\sigma^*$ dado. De acuerdo con (21), es posible obtener la f.d.d. de a_0^* a partir de la f.d.d. de N_f^* como sigue:

$$\begin{aligned} F_{A_0^*}(a_0^*) &= \Pr(A_0^* \leq a_0^*) \\ &= \Pr\left(Z^{-1}\left\{\frac{1}{\rho}Z\left[a_0^* \left(a_0^{*-1}\left[Z^{-1}(\rho Z(a_f^*))\right] - \rho^k N_f^*\right)\right]\right\} \leq a_0^*\right) \\ &= \Pr\left(N_f^* \geq \frac{a_0^{*-1}\left[Z^{-1}(\rho Z(a_f^*))\right] - a_0^{*-1}\left[Z^{-1}(\rho Z(a_0^*))\right]}{\rho^k}\right) \\ &= 1 - F_{N_f^*}\left(\frac{a_0^{*-1}\left[Z^{-1}(\rho Z(a_f^*))\right] - a_0^{*-1}\left[Z^{-1}(\rho Z(a_0^*))\right]}{\rho^k}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

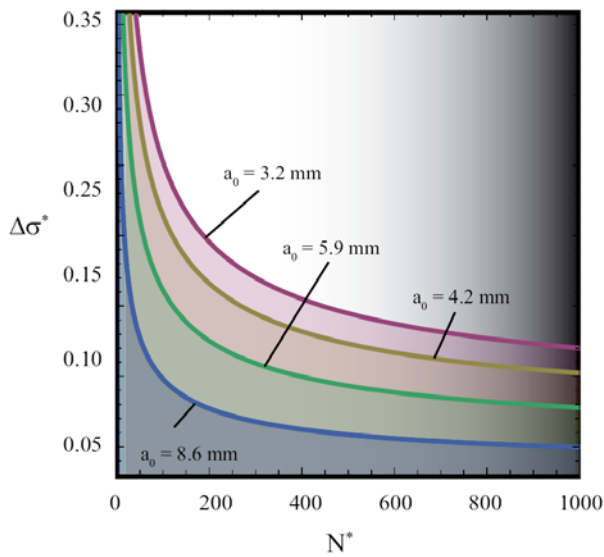


Figura 4. Curvas S-N obtenidas de la ecuación (19).

Como se puede observar, para conocer la forma de las curvas percentiles del campo S-N no se requiere conocer la f.d.d. $F_{A_0^*}(a_0^*)$, mientras que para identificar el percentil asociado a un determinado valor de p sí es preciso conocerla previamente, aunque puede ser deducida a partir de la f.d.d. $F_{N_f^*}(N_f^*)$, como se verá en la próxima sección.

Retomando el ejemplo de la sección 3, en la figura 4 se muestran los percentiles de las curvas S-N correspondientes a los tamaños iniciales de grietas $a_0 = 3.2, 4.2, 5.9$ y 8.6 mm para un tamaño crítico de grieta $a_f = 12$ mm ($a_f^* = 0.5$). Obsérvese que, contraria-

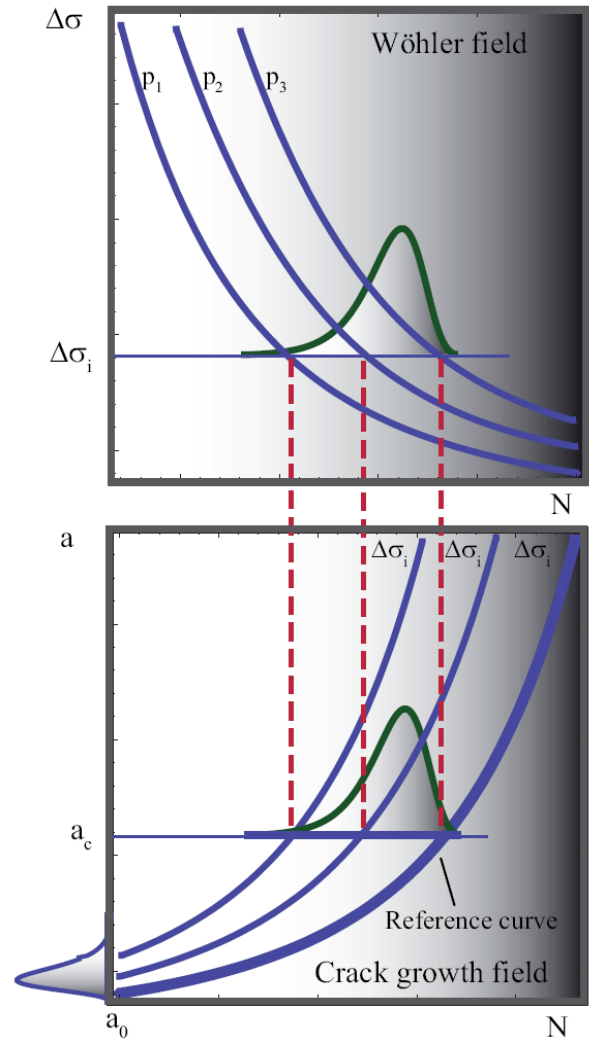


Figura 5. Correspondencia entre las curvas de crecimiento de grieta y las curvas S-N.

mente al campo S-N convencional, el límite de fatiga depende del percentil.

A su vez, la correspondencia existente entre las curvas de crecimiento de grieta y el campo S-N queda ilustrada esquemáticamente en la figura 5, en la que se puede observar la relación entre la función de densidad del tamaño inicial de grieta y la función de densidad de la vida de fatiga para un rango determinado de tensión $\Delta\sigma_i$. Esta última, deducida de las curvas de crecimiento de grieta, tiene que coincidir con la función de densidad resultante en el campo S-N.

Esto demuestra que la información estadística proporcionada por $F_{N^*}(N^*)$ relativa a un particular rango de tensión del campo S-N, juntamente con la curva de crecimiento de grieta de referencia $a_0^*(\cdot)$ permite la determinación de la f.d.d. de la longitud

inicial de grieta $F_{A_0^*}(A_0^*)$. De este modo, combinando ensayos de fatiga para $\Delta\sigma$ y R fijos con ensayos de crecimiento de grieta, es posible determinar $F_{A_0^*}(A_0^*)$.

Siguiendo un proceso similar, se deduce

$$F_{N_f^*}(n_f^*) = 1 - F_{A_0^*} \left(Z^{-1} \left\{ \frac{1}{\rho} Z \left[a_0^* \left(a_0^{*-1} \left[Z^{-1}(\rho Z(a_f^*)) \right] - \rho^k N_f^* \right) \right] \right\} \right), \quad (22)$$

que implica que la f.d.d. de la longitud inicial de grieta a_0^* , juntamente con la curva de crecimiento de grieta de referencia $a_0^*(\cdot)$ permite determinar la f.d.d. $F_{N_f^*}(N_f^*)$ relativa a la vida en fatiga.

5. CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que se derivan del presente trabajo son:

- La identificación de la variable normalizada ΔK^{**} , que toma valores en el intervalo [0,1], como una f.d.d. permite definir analíticamente la relación entre da/dN y ΔK^{**} aprovechando la experiencia acumulada en el campo estadístico sobre estas funciones y los métodos de estimación de los parámetros.

- Si la función $Z(a^*(N^*))$ responde a las formas descritas, tal como queda confirmado en los resultados considerados en este trabajo, resulta posible obtener las curvas de crecimiento de grieta para cualquier combinación de $\Delta\sigma^*$ y tamaño inicial de grieta, a partir de una única curva de referencia.

- El modelo propuesto proporciona una expresión analítica de la curva de velocidad de crecimiento de grieta a emplear en el cálculo a fatiga de elementos mecánicos y estructurales mediante ajuste de los resultados experimentales por el método de mínimos cuadrados.

- La información estadística contenida en $F_{N_f^*}(N_f^*)$ suministrada para un rango particular del campo S-N, junto con la curva de crecimiento de grieta de referencia $a_0^*(\cdot)$ permite la determinación de la f.d.d. $F_{A_0^*}(A_0^*)$ de la longitud inicial de la grieta. Análogamente la f.d.d. $F_{A_0^*}(A_0^*)$, juntamente con $a_0^*(\cdot)$ permite la determinación de la f.d.d. de la vida en fatiga $F_{N_f^*}(N_f^*)$ para cualquier rango de tensión $\Delta\sigma^*$.

- Se demuestra que es posible obtener el campo S-N a partir de $F_{N_f^*}(N_f^*)$ o de $F_{A_0^*}(A_0^*)$ y de la curva de referencia $a_0^*(\cdot)$, lo que tiene importantes consecuencias en la práctica.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico recibido a través de la subvención de los proyectos MEC (Ref.: DPI 2007-66903-C02-01) y FICYT (Ref.: IB08-171), así como la beca del Ministerio de Ciencia e Innovación que permitió la estancia del primer autor en el Fraunhofer IWM de Freiburg (Alemania).

7. REFERENCIAS

- [1] Paris P., Erdogan F., *A critical analysis of crack propagation laws*, J. of Basic Engineering, 85, 528-534, 1960.
- [2] NASGRO, *Fatigue crack growth computer program NASGRO, version 3- Reference Manual 2000*.
- [3] Pugno A., Ciavarella M., Cornetti A., Carpinteri A., *Paris' law for fatigue crack growth*, J. of Mech. Physics of Solids, 54, 1333-1349, 2006.
- [4] Agha H.Y., Béranger A.S., Billardon R., Hild F., *A probabilistic approach to predict the very high cycle fatigue behaviour of spheroidal graphite cast iron*. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 23, 173-180, 2000.
- [5] Vormwald M., *Anrisslebensdauervorhersage auf der Basis der Schwingbruchmechanik für kurze Risse*, Ph.D. Thesis, Techn. Hochschule Darmstadt, 1989.
- [6] Spagnoli A., *Self-similarity and fractals in the Paris range of fatigue crack growth*. Mechanics and Materials, 37, 519-529, 2005, 2009.
- [7] Ritchie R.O., *Incomplete self-similarity and fatigue-crack growth*, Int. J. Of Fracture, 132, 197-203, 2005.. Submitted to Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2009.
- [8] Carpinteri A., Paggi M., *Selfsimilarity and crack growth instability in the correlation between the Paris' constants*, Eng. Fracture Mechanics, 74, 1041-1053, 2007.
- [9] Castillo E., Fernández Canteli A., Siegele D., *Obtaining S-N curves from crack growth curves. An alternative to self-similarity*. Submitted to Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2009.
- [10] Anderson, T.L., *Fracture mechanics. Fundamentals and applications*, Taylor and Francis, Boca Raton, 3rd edition 2006.