

# ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE VIGAS DE VIDRIO LAMINADO

D. Rodríguez Argüelles, P. Fernández Fernández, M. López Aenlle, A.  
Fernández Canteli, M. J. Lamela Rey.

Dpto. de Construcción e Ingeniería de Fabricación, EPS de Ingeniería de Gijón  
Universidad de Oviedo, Campus de Viesques, 33203 Gijón

E-mail: [aelle@uniovi.es](mailto:aelle@uniovi.es)

Tfno: 985152057. Fax: 985182055

## RESUMEN

El vidrio laminado es un elemento tipo sándwich formado por dos o más placas de vidrio, entre las que se colocan una o más láminas de butiral polivinilo (PVB). Para el análisis de vigas tipo sándwich, como son las vigas de vidrio laminado se han propuesto distintos modelos, en los que el vidrio se suele modelizar como material elástico-lineal, mientras que el PVB presenta un comportamiento viscoelástico, cuyas propiedades dependen de la temperatura y de la frecuencia. En este trabajo se utiliza el modelo propuesto por Ross, Kerwing y Ugar (RKU) para predecir el comportamiento dinámico de vigas de vidrio laminado. Los resultados obtenidos se validan con los obtenidos experimentalmente mediante análisis modal operacional.

## ABSTRACT

Laminated glass is a sandwich element consisting of two or more glass sheets, with one or more interlayers of polyvinyl butyral (PVB). Several analytical methods have been proposed to estimate the dynamic response of sandwich elements, such as laminated glass beams. In these models, glass is usually modeled as a linear-elastic material, whereas PVB presents a linear viscoelastic-behavior, whose mechanical properties present frequency-temperature dependence. In this work the Ross-Kerwin-Ugar model is used to predict the dynamic behavior of laminated glass beams. The analytical results are compared with those obtained by operational modal analysis.

**KEY WORDS:** vidrio laminado, análisis modal, vigas sándwich, viscoelasticidad.

## 1. INTRODUCTION

El vidrio laminado más común se compone de dos o más placas de vidrio monolítico que se unen entre sí mediante una lámina de PVB (butiral polivinilo). La lámina de PVB tiene un espesor de 0.38 mm o un múltiplo de este valor. Al someter el conjunto a una presión y temperatura elevadas en un autoclave, se produce la adherencia entre la lámina de PVB y las placas de vidrio.

En los últimos años, la aplicación del vidrio laminado en la edificación ha experimentado un gran crecimiento, especialmente en acristalamiento de fachadas, cubiertas, escaleras o escaparates. La principal ventaja del vidrio laminado sobre el monolítico es la mayor seguridad que aporta en caso de rotura, ya que los fragmentos quedan adheridos a la lámina de PVB, reduciendo así el riesgo de accidente. Además, la capa intermedia aumenta notablemente el amortiguamiento del conjunto, reduciendo de esta forma las vibraciones debidas a cargas de viento o de carácter sísmico.

La simulación del comportamiento dinámico de elementos estructurales de vidrio laminado mediante métodos analíticos o numéricos, requiere la caracterización de los elementos que lo componen. El vidrio se suele caracterizar mediante ensayos estáticos a flexión y el PVB mediante ensayos de relajación o fluencia, estáticos o dinámicos.

El PVB es un termoplástico amorfo que presenta un comportamiento viscoelástico lineal. Una característica fundamental de los materiales viscoelásticos es que sus propiedades mecánicas dependen de la frecuencia (o del tiempo) y de la temperatura. Estas variaciones en las propiedades dificultan el cálculo resistente de elementos con comportamiento viscoelástico.

Por su parte, el vidrio se puede considerar un material elástico-lineal. La presencia de microdefectos superficiales que tienen su origen en la fabricación o la posterior manipulación del vidrio hacen que presente una gran dispersión en los valores de su resistencia mecánica a tracción.

En este trabajo se realiza un estudio analítico del comportamiento dinámico de vigas de vidrio laminado, a partir de las propiedades mecánicas de los materiales que lo componen (vidrio y PVB), por medio del modelo de RKU para vigas sándwich. Posteriormente, las predicciones analíticas se comparan con los resultados obtenidos experimentalmente, mediante la aplicación de análisis modal operacional.

## 2. CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE LOS MATERIALES VISCOELÁSTICOS

Los materiales viscoelásticos se caracterizan dinámicamente mediante sus módulos complejos. En el caso de carga axial, el módulo complejo de un material viscoelástico  $E^*(\omega)$  se define como:

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = E'(\omega)(1 + i\eta_E(\omega)) \quad (1)$$

donde  $E'(\omega)$  y  $E''(\omega)$  se conocen como módulo de almacenamiento y pérdidas, respectivamente. A la relación entre ambos módulos,  $\eta_E$ , se le denomina factor de pérdidas.

Análogamente, el comportamiento del material a cizalladura, se define mediante el módulo de cortante complejo  $G^*(\omega)$ :

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) = G(\omega)(1 + i\eta_G(\omega)) \quad (2)$$

En el caso de materiales viscoelásticos lineales, la aplicación del principio de correspondencia permite relacionar los módulos en el dominio de la frecuencia, usando la misma expresión que en la teoría de la elasticidad [1], es decir:

$$G^*(\omega) = \frac{3E^*(\omega)K(\omega)}{9K(\omega) - E^*(\omega)} \quad (3)$$

siendo  $K(\omega)$  el módulo volumétrico.

Los módulos complejos de un material viscoelástico lineal, también se pueden obtener de forma indirecta por medio de sus módulos definidos en el dominio del tiempo. A pesar de existir relaciones matemáticas entre ambos módulos, no resulta sencillo calcular su solución exacta y, por tanto, se han desarrollado métodos alternativos de interconversión [2]. Utilizando el modelo de Maxwell generalizado [3], el módulo de relajación  $E(t)$  se puede expresar como:

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^n e_i \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (4)$$

donde  $e_i$  y  $\tau_i$  son los coeficientes de las series de Prony.

A partir de estos coeficientes, el módulo en el dominio de la frecuencia se puede obtener mediante:

$$E'(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i^2 \omega^2 e_i}{\tau_i^2 \omega^2 + 1} \quad (5)$$

$$E''(\omega) = E_\infty + \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i \omega e_i}{\tau_i^2 \omega^2 + 1} \quad (6)$$

## 3. CARACTERIZACIÓN DEL PVB: PARTE EXPERIMENTAL

### 3.1. Equipo y descripción de ensayos

Los ensayos para caracterizar el PVB fueron realizados en un analizador dinamo-mecánico. El equipo dispone de una cámara de temperatura controlada, que permite realizar ensayos en un rango de temperaturas de -60 °C a 150 °C.

Para obtener el módulo de relajación a tracción del PVB, se realizaron ensayos cuasi-estáticos de relajación (se somete a la probeta a una deformación constante) de 10 minutos de tiempo a diferentes temperaturas.

A partir de las curvas a diferentes temperaturas, se obtuvo la curva maestra del material a la temperatura de referencia de 20°C, aplicando el principio de superposición temperatura-tiempo (TTS) [3]. Los factores de ajuste horizontal para la aplicación del principio TTS, se obtuvieron a través de la ecuación de William, Landel y Ferry (WLF) [4].

### 3.2. Resultados experimentales y conversiones.

Los parámetros de WLF empleados para obtener la curva maestra de relajación son:  $C_1=49.806$  y  $C_2=328.46$ .

Aplicando las ecuaciones (5) y (6), se obtuvo las componentes del módulo complejo  $E'(\omega)$  y  $E''(\omega)$ , a partir de la curva de relajación en el dominio del tiempo. Posteriormente, aplicando la ecuación (3) y tomando un valor constante en frecuencia del módulo volumétrico de 2 GPa [5], se obtuvo el módulo complejo a cortadura, Figura 1.

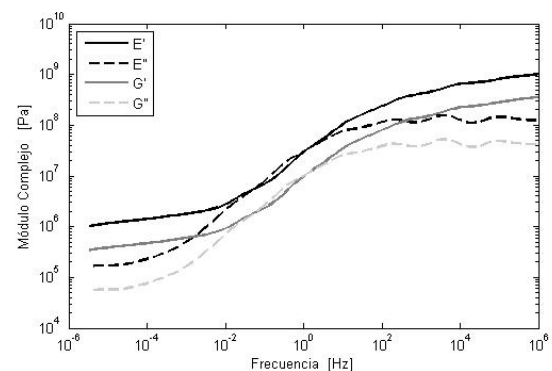


Figura 1. Componentes del módulo complejo axial y a cortadura del PVB a 20°C.

#### 4. ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL (OMA)

El análisis modal operacional (OMA) es una técnica adecuada para la estimación de parámetros modales en un amplio abanico de aplicaciones [6]. La diferencia principal con el análisis modal clásico radica en que no es necesario conocer las cargas que se aplican sobre la estructura para estimar los parámetros modales.

Los ensayos se llevan a cabo midiendo las respuestas de la estructura (aceleraciones) bajo las condiciones de servicio de la misma, como por ejemplo, cargas de viento, oleaje, cargas de tráfico, etc. En el caso de ensayos en laboratorio, se utilizan cargas artificiales de naturaleza aleatoria que simulen las condiciones reales de trabajo de la estructura.

#### 5. PREDICCIÓN ANALÍTICA DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE VIGAS SANDWICH

Las vigas de vidrio laminado pueden considerarse vigas sándwich simétricas (Figura 2). Para el cálculo el vidrio de las capas externas se suele considerar un material elástico-lineal, mientras que la capa intermedia de PVB se considera un material viscoelástico-lineal, siendo sus módulos dependientes de la frecuencia y de la temperatura.

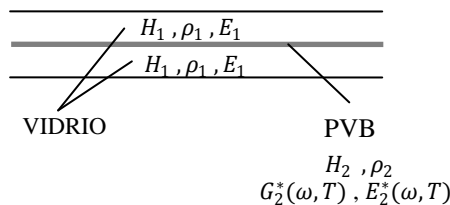


Figura 2. Vista transversal de una viga de vidrio laminado

Desde finales de los años 50 se han desarrollado diversos modelos analíticos para predecir la respuesta dinámica de vigas sándwich con comportamiento viscoelástico. Entre los más conocidos se encuentran los desarrollados por Ross, Kerwin, y Ungar [7] o Mead y Markus [8]. El desarrollo de programas de elementos finitos ha aumentado considerablemente la precisión en las predicciones de la respuesta dinámica de estructuras amortiguadas. Sin embargo, en el caso de vigas, estos métodos analíticos proporcionan unos resultados lo suficientemente precisos.

##### 4.1. Modelo de RKU

Ross, Kerwin y Ungar (RKU) desarrollaron uno de los primeros modelos para vigas sándwich, formada por dos capas elásticas externas y una capa viscoelástica intermedia. Cuando las dos capas externas experimentan flexión cíclica, deforman por cortante la capa

viscoelástica. La deformación por cortante es un mecanismo por el cual se disipa más energía que si la capa estuviera sometida sólo a deformaciones axiales, lo cual permite que las oscilaciones estructurales se atenúen más rápido [9].

El modelo propuesto por RKU supone que el comportamiento dinámico a flexión de una viga sándwich está gobernado por la teoría de flexión de Euler-Bernoulli. Las frecuencias naturales de flexión de una viga simple que cumple la teoría de Euler-Bernoulli, vienen dadas por:

$$\omega_n^2 = k_n^4 \frac{EI}{\bar{m}} \quad (7)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad,  $I$  la inercia de la viga,  $\bar{m}$  la masa por unidad de longitud y  $k_n$  el número de onda, cuyos valores para vigas biapoyadas y libre-libre se indican en la Tabla 1.

Tabla 1. Valores de  $C_n = (k_n L)^2$ , según la condición de contorno.

Nº Modo	$C_n = (k_n L)^2$	
	Libre-Libre	Biapoyada
1	22.3733	$\pi^2$
2	61.6728	$4\pi^2$
3	120.9034	$9\pi^2$
4	199.8594	$16\pi^2$

En el caso de vigas biapoyadas los modos de vibración vienen dados por una senoide:

$$\phi(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (8)$$

siendo  $n$  es el número del modo.

Para vigas sándwich simplemente apoyadas, el modelo de RKU supone que los modos de vibración también son sinusoides, por lo que proponen utilizar la ecuación (7) para determinar las frecuencias naturales, pero considerando una rigidez equivalente  $(EI)^*$ , es decir:

$$\omega_n^{2*} = k_n^4 \frac{(EI)^*}{\bar{m}} \quad (9)$$

Esta suposición se considera aceptable sólo en los modos altos, por lo que se recomienda no considerar el primer modo [10]. Para otras condiciones de apoyo distintas de apoyada, se introduce un factor corrector en el número de onda. En el caso de vigas libre-libre, este factor es igual a la unidad para todos los modos.

Considerando una viga sándwich de longitud  $L$  y ancho  $b$  compuesta por dos capas externas elásticas de espesores  $H_1$  y  $H_3$  y módulo elásticos  $E_1$  y  $E_3$  respectivamente, una capa viscoelástica intermedia de

espesor  $H_2$  y módulo cortante complejo  $G_2^*$ , la rigidez a flexión equivalente  $(EI)^*$  en el modelo RKU, viene dada por:

$$(EI)^* = b \left[ \frac{H_1^3}{6} + E_1 H_1 (H_1 + H_2)^2 \frac{g^*}{1+2g^*} \right] \quad (10)$$

$$g^* = G_2^* L^2 / E_3 H_2 H_3 k_n^2 \quad (11)$$

siendo  $g^*$  el denominado “parámetro de cortadura”. El símbolo “\*” representa un valor complejo.

La expresión (10) corresponde al modelo de RKU en el que se considera despreciable la contribución del módulo axial viscoelástico en la rigidez a flexión de la viga, es decir:  $E_2^* \cong 0$ .

La expresión (9) proporciona un valor complejo para la frecuencia. La parte real corresponde a la frecuencia natural de la viga, mientras que la parte imaginaria contiene información sobre el amortiguamiento de la misma, es decir:

$$\omega_n^{2*} = \omega_n^2 (1 + i\eta_n) \quad (12)$$

siendo  $\eta_n$  es el amortiguamiento de la viga.

#### 4.2 Aplicación del modelo RKU a vigas de vidrio laminado.

Los valores de las frecuencias naturales y amortiguamientos de las distintas vigas de vidrio laminado estudiadas, se obtuvieron mediante un proceso iterativo, ver Figura 3.

Partiendo de los valores del número de onda de una viga de Euler-Bernoulli (Tabla 1), se obtiene una estimación de la frecuencia natural para una viga de vidrio monolítico,  $\omega_{n0}$ . A partir de este valor de frecuencia se obtiene el módulo dinámico del PVB  $G_2^*(\omega, T)$ , el parámetro de cortadura  $g^*$  (ecuación 11) y la rigidez compleja de la viga  $(EI)^*$  (ecuación 10). El proceso iterativo concluye cuando converge la ecuación (9).

Mediante este proceso se estiman las frecuencias naturales e índices de amortiguamiento en vigas de vidrio laminado de diversos espesores y longitudes con dos condiciones de contorno: libre-libre y biapoyadas. Las características mecánicas y geométricas de las vigas consideradas pueden verse en la Tabla 2, mientras que las frecuencias naturales y los índices de amortiguamiento obtenidos con este modelo, se indican en las Tablas 3 y 4.

Un proceso iterativo semejante al anterior se ha empleado también mediante el modelo propuesto por Mead. Ambos métodos, RKU y Mead proporcionan aproximadamente los mismos resultados de  $\omega_n$  y  $\eta_n$  para las vigas de vidrio laminado.

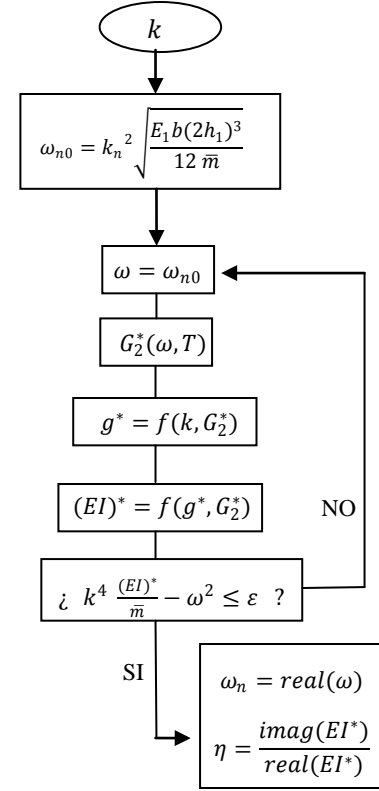


Figura 3. Esquema del proceso iterativo empleado para obtener los parámetros modales analíticamente, donde  $\varepsilon$  es la tolerancia de convergencia.

## 6. ENSAYOS DINÁMICOS EN VIGAS DE VIDRIO LAMINADO

Las predicciones realizadas con el modelo RKU se validaron con ensayos modales operacionales, a partir de los cuales se obtienen los parámetros modales de las vigas (frecuencias naturales,  $\omega_n$ , modos de vibración,  $\Phi_n$ , e índices de amortiguamiento,  $\zeta_n$ .)

### 5.1. Descripción de ensayos

Los ensayos modales se realizaron aplicando una carga aleatoria mediante impactos sucesivos. Las respuestas en aceleración se registraron utilizando 8 acelerómetros Brüel & Kjær 4508B, dispuestos equiespaciadamente, Figura 4. Las aceleraciones se registraron con una tarjeta DSA 4472 PCI y la aplicación LabView, ambas de la firma Nacional Instruments.

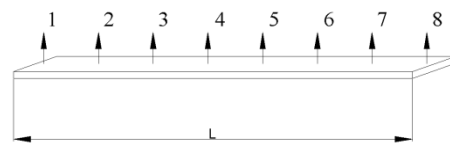


Figura 4. Distribución de los acelerómetros en las vigas de vidrio laminado

Los parámetros modales se estimaron aplicando los métodos de identificación de subespacios estocásticos (SSI) [11], concretamente CVA-SSI, implementado en la aplicación ARTeMIS Extractor. En cada ensayo se registraron las aceleraciones durante un tiempo de 2 minutos a una frecuencia de muestreo de 4000 Hz. Para cada viga se identificaron los cuatro primeros modos de flexión y se controló la temperatura de la viga con un termopar. Los resultados obtenidos experimentalmente se muestran en las Tablas 3 y 4.

Tabla 2. Características de las vigas de vidrio laminado

	Viga 1	Viga 2	Viga 3
$E_1$ [Pa]	$7.2 \cdot 10^{10}$		
$\rho_1$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2500		
$\rho_2$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1070		
b [m]	0.1		
L [m]	1	1	1.4
H <sub>1</sub> [mm]	3	4	4
H <sub>2</sub> [mm]	0.38	0.38	0.38

## 7. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En las Tablas 3 y 4 se observa que las frecuencias naturales obtenidas analíticamente son ligeramente superiores a los resultados experimentales. El promedio de los errores relativos cometidos es del 3%, por lo que el modelo de RKU estima con una precisión razonable las frecuencias naturales. Por otro lado, en el cálculo analítico sólo se ha tenido en cuenta la masa de la viga, despreciando la influencia de la masa de los acelerómetros, cableado, etc. Por tanto, si se hubiera tenido en cuenta estas masas los errores hubiesen sido menores.

Tabla 3. Frecuencias naturales experimentales y analíticas para vigas libre-libre

Viga	Modo	T [°C]	fn [Hz]		ε [%]
			EXPERIMENTAL	ANALÍTICO	
1	1	25.7	31.9	34.4	7.2
	2	25.7	86.9	94.0	7.6
	3	25.7	172.1	182.7	5.8
	4	25.7	280.5	298.9	6.2
2	1	25.5	44.1	45.3	2.6
	2	25.5	120.3	123.6	2.7
	3	25.5	232.9	239.6	2.8
	4	25.5	378.3	390.6	3.1
3	1	24.4	22.5	23.2	3.1
	2	24.4	62.0	63.6	2.6
	3	24.4	121.0	123.9	2.3
	4	24.4	198.0	203.3	2.6

En lo que se refiere al amortiguamiento, los resultados presentan bastante dispersión, efecto que, por otra parte es habitual en análisis modal. Las predicciones analíticas y los resultados experimentales se muestran en las Figuras 5 y 6, en las que se observa que los

valores obtenidos experimentalmente son mayores que las estimaciones analíticas. El promedio de los errores relativos cometidos, sin considerar el primer modo donde los errores son superiores, es del 28%. En las representaciones de las Figuras 5 y 6 se ha supuesto que el amortiguamiento viscoelástico  $\eta$ , es el doble del amortiguamiento modal  $\zeta$ , es decir:  $\eta=2\zeta$ .

Tabla 4. Frecuencias naturales experimentales y analíticas para vigas biapoyadas.

Viga	Modo	T [°C]	fn [Hz]		ε [%]
			EXPERIMENTAL	ANALÍTICO	
1	1	25.1	14.8	15.2	2.9
	2	25.1	57.9	60.5	4.3
	3	25.1	129	135.1	4.5
	4	25.1	226.7	237.9	4.7
2	1	24.4	19.9	20.1	0.8
	2	24.4	78.4	79.7	1.6
	3	24.4	173.7	177.6	2.2
	4	24.4	304.2	311.7	2.4
3	1	24.9	10.6	10.3	3.4
	2	24.9	40.9	40.8	0.3
	3	24.9	91.0	91.2	0.3
	4	24.9	160.2	161.2	0.6

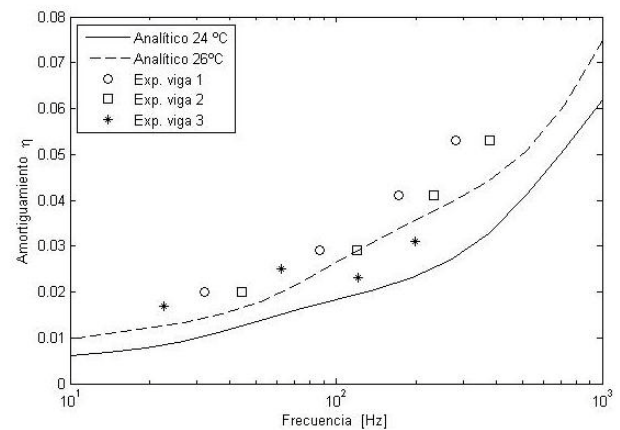


Figura 5. Índices de amortiguamiento de las vigas libre-libre, en función de la frecuencia.

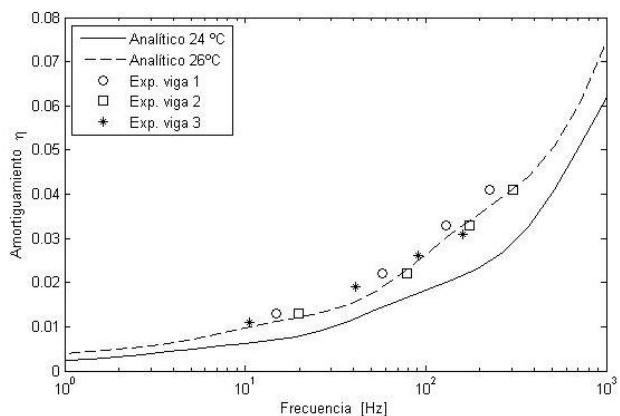


Figura 6. Índices de amortiguamiento de las vigas biapoyadas, en función de la frecuencia.

## 8. EFECTO DE LA TEMPERATURA

Resulta importante destacar la gran influencia que tiene la temperatura de la lámina de PVB en los resultados modales, especialmente en el amortiguamiento. Este efecto se ha comprobado tanto experimental como analíticamente, Figura 7. Por tanto, resulta imprescindible el control preciso de la temperatura en los ensayos.

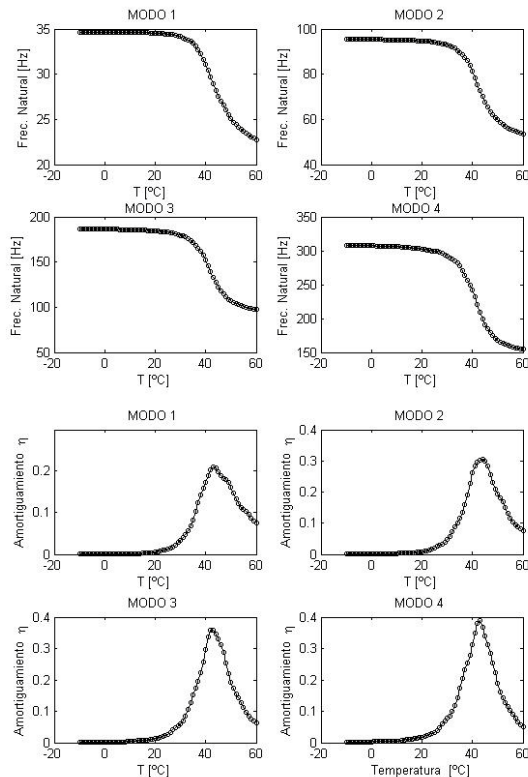


Figura 7. Influencia de la temperatura en los valores modales. Estimaciones del modelo RKU para la viga 1.

## 9. CONCLUSIONES

- Se han estimado los parámetros modales de vigas de vidrio laminado mediante el modelo de RKU y el modelo de Mead. Los ensayos modales realizados confirman que estos modelos predicen con una precisión razonable las frecuencias naturales de estos elementos, mientras que existe una gran dispersión en los índices de amortiguamiento.
- La temperatura es una variable fundamental, que tiene una gran influencia en el comportamiento dinámico de las vigas de vidrio laminado, especialmente en el amortiguamiento.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación económica recibida de la CICYT a través del proyecto de investigación BIA2008-06816-C02-01.

## REFERENCIAS

- [1] Tschoegl N.W.; Knauss W.G.; Emri I. *Poisson's Ratio in Linear Viscoelasticity – A critical review*. Mechanics of Time-Dependent Materials, Volume 6, Number 1, 2002, pp. 3-51(49).
- [2] P. Fernández Fernández, D. Rodríguez Argüelles, M.J. Lamela Rey, A. Fernández Canteli. *Estudio de la interconversión entre las funciones de comportamiento de un material viscoelástico*. Anales de Mecánica de la Fractura 26, Vol. 1 (2009)
- [3] Ferry, J. D. *Viscoelastic Properties of Polymers*. John Wiley & Sons. 3ª Edición, New York. (1980).
- [4] Williams, M.L., Robert F. Landel and John Ferry. *The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids*. Department of chemistry, university of Wisconsin. 1955.
- [5] Alex Van Duser, Anand Jagota, Stephen J. Bennison. *Analysis of glass/polyvinylbutyral laminates subjected to uniform pressure*. Journal of Engineering Mechanics, 125(4):435–442, April 1999.
- [6] R. Brincker, C. Ventura and P. Andersen: *Why Output-Only Modal Testing is a Desirable Tool for a Wide Range of Practical Applications*. In Proc. Of the International Modal Analysis Conference (IMAC) XXI, paper 265, February, 2003.
- [7] Ross, D., Ungar, E.E., Kerwin, E.M. Jr. 1959. *Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate*. In ASME (Ed.). *Structural Damping* (pp. 49-88). New York: ASME.
- [8] Mead, D.J., and Markus, S. 1969. *The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions*. Journal of Sound and Vibration. 10(2), 163-175.
- [9] Jones D.I.G., *Reflections on damping technology at the end of the twentieth century*. Journal of Sound and Vibration, 190(3):449-462. 1996
- [10] Jones, D.I.G., *Handbook of viscoelastic vibration damping*. John Wiley & Sons, Ltd, 2001.
- [11] Van Overschee, P., De Moor, B. *Subspace identification for linear systems – Theory, Implementation, Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1996.