

# Anales de Mecánica de la Fractura

TEXTO DE LAS COMUNICACIONES PRESENTADAS  
EN EL QUINTO ENCUENTRO DEL  
GRUPO ESPAÑOL DE FRACTURA

---

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona

25-26 de Abril de 1988

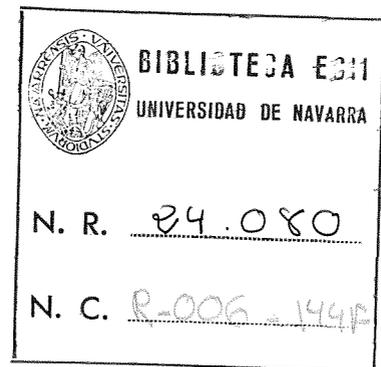


# ANALES DE MECANICA DE LA FRACTURA

V Encuentro del Grupo Español de Fractura  
Barcelona, Abril de 1988

*Editados por:*

M. ELICES  
J. OLIVER  
E. OÑATE  
M.A. ASTIZ



Grupo Español de Fractura  
Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería



E24080

M. Elices, J. Oliver, E. Oñate, M.A. Astiz  
Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.  
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona (España).

Imprime: Gráficas Torres  
Morales, 17-08029 Barcelona.

ISBN: 84-600-5338-5

Dep. legal: B-17603-88

## *Editorial*

El Grupo Español de Fractura celebra su quinto cumpleaños con estos Anales de la Mecánica de la Fractura. Los anteriores:

Anales 1.-	Sigüenza	23-24 Febrero	1984
Anales 2.-	Sigüenza	24-26 Abril	1985
Anales 3.-	Sigüenza	17-18 Abril	1986
Anales 4.-	Braga	23-24 Abril	1987

recogen las comunicaciones presentadas en los tres primeros encuentros del Grupo Español de Fractura y en las primeras Jornadas Ibéricas de Fractura.

Después de estos años se ha considerado conveniente promover, de vez en cuando, reuniones monográficas para poder profundizar en determinadas áreas y para detectar, en cierto modo, el grado de madurez del Grupo Español. Estos Anales están dedicados a los Métodos de Análisis Numérico que se utilizan en la Mecánica de la Fractura.

Las contribuciones se han agrupado en siete capítulos. En los seis primeros se desarrollan de forma general las aplicaciones de los Métodos Numéricos a la resolución de diversos problemas de Mecánica de Fractura como son: Fractura Elástica, Fractura Elastoplástica, Fractura en Materiales Cohesivos, Fractura por Fatiga, Fractura en Ambientes Agresivos y Fractura en Problemas Dinámicos. Estos capítulos dan una visión panorámica de la situación española en el campo de los métodos de Análisis Numérico. Las restantes comunicaciones, de carácter más específico, se han reunido en el último capítulo.

Los editores desean expresar su agradecimiento a todos los participantes y al equipo de Edición del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (Sandra Navarrina, Susana Andía y Susana Creus) que han hecho posible la publicación de estos Anales.

Barcelona, Abril de 1988.

*Manuel Elices Calafat*

*Javier Oliver Olivella*

*Eugenio Oñate Ibañez de Navarra*

*Miguel Angel Astiz*



# INDICE

pag.

## *I*     **FRACTURA ELASTICA**

### **Métodos Numéricos para el estudio de singularidades en Elasticidad lineal**

1. Introducción	1
2. Aproximación por elementos finitos	5
3. Refinamiento del mallado	8
4. Aumento del espacio con funciones singulares	9
5. Elementos singulares	10
5.1 Elementos isoparamétricos degenerados obtenidos por desplazamiento de nodos	10
5.2 Elementos que incorporan la singularidad a través del cambio en la forma del elemento y coordenadas de los puntos nodales	13
5.3 Elementos singulares generados mediante la modificación de las funciones de base	16
6. Un ejemplo	19

## *II*    **FRACTURA ELASTOPLASTICA**

### **Modelos elastoplásticos para la simulación numérica de procesos de fractura**

1. Introducción	27
2. Endurecimiento y ablandamiento por deformación	30
3. Localización	30
4. Objetividad	32
5. Fundamentos de la Teoría de la Plasticidad	34
5.1 Superficie de fluencia	35
5.2 Ecuaciones de evolución	37
5.3 Descomposición aditiva de la deformación	39
5.4 Regla de flujo plástico	40

## INDICE

5.5 Ecuación constitutiva en régimen de deformación plástico	41
5.6 Irreversibilidad del trabajo plástico	42
6. Particularización a un modelo para materiales frágiles cohesivos	42
6.1 Variables internas	42
6.2 Superficies de fluencia y potencial plástico	42
6.3 Ecuaciones de evolución	47
6.4 Líneas o superficies de fractura	48
7. Ejemplos de aplicación	49
7.1 Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada (Modo de fractura I)	49
7.2 Ensayo a flexión y corte de una viga entallada. Modo mixto de fractura (Modos I y II)	51
8. Conclusiones	58

### III FRACTURA COHESIVA

#### Métodos Numéricos en la fractura de Materiales Cohesivos

1. Características en fractura de Materiales Cohesivos	61
2. Modelos de fisura cohesiva	64
2.1 Hipótesis básicas	65
2.2 Curvas de ablandamiento y parámetros asociados	65
3. Modelos de banda cohesiva	68
3.1 Hipótesis básicas	69
3.2 Formulación matemática de las relaciones $\sigma - \varepsilon$ en la banda	70
3.3 Curvas de ablandamiento en modo de apertura pura	71
3.4 Curvas de ablandamiento en modo mixto	72
4. Implementación numérica del modelo de fisura cohesiva	73
4.1 Introducción	73
4.2 Proceso de cálculo	74
4.3 Implementación en un programa de elementos finitos	76
5. Implementación numérica del modelo de banda cohesiva	77
5.1 Introducción	77
5.2 Comportamiento del material en la zona dañada	77
5.3 Proceso de cálculo	79
5.4 Implementación en un programa de Elementos Finitos	81
6. Ejemplo	82
6.1 Resultados experimentales	82
6.2 Modelo de fisura cohesiva	83
6.3 Modelo de banda cohesiva	86

## INDICE

### IV *FRACTURA POR FATIGA*

#### **Métodos Numéricos en Fatiga**

1. Introducción	91
2. Iniciación	93
3. Propagación	101
4. Simulación de la propagación mediante el MEF	104
4.1 Cambio de geometría por crecimiento de la grieta	105
4.2 Necesidad de disminuir el tiempo de CPU	108
4.3 Control de cierre de grieta y consideración del contacto	109
4.4 El caso tridimensional	110
5. Otros métodos para la determinación de la tensión de cierre	111
6. Conclusiones	116

### V *FRACTURA EN AMBIENTES AGRESIVOS*

#### **Métodos Numéricos para el análisis de la fisuración en medios agresivos**

1. Introducción	121
2. Modelos Elementales	122
2.1 Modelo de la Tensión Hidrostática	123
2.2 Modelo de la Deformación Plástica	126
3. Modelos generales	128
3.1 Modelo de Solubilidad no Uniforme	128
3.2 Modelos de Difusión con Trampas	130
4. Aplicaciones	132
5. Conclusiones	133

### VI *FRACTURA EN PROBLEMAS DINAMICOS*

#### **Modelización de problemas de Impacto con Fractura**

1. Introducción	138
2. Metodologías Numéricas generales	139
3. Modelos de fractura dinámica	143
4. Análisis numérico de algunos problemas dinámicos con fractura	149
5. Conclusiones	154

VII *TEMAS ESPECIFICOS***Estudio de la importancia de la no-linealidad geométrica en ciertos problemas de Mecánica de Fractura**

1. Introducción	157
2. Método de análisis	158
3. Resultados	159
4. Conclusiones	161

**Un nuevo Elemento Finito de Transición en problemas de fractura en modo mixto**

1. Introducción	163
2. Elementos transformados que adoptan la forma de la singularidad en un dominio con contorno irregular	164
3. Nuevos elementos singulares transformados de transición en el caso de grietas	166
4. Sobre el cálculo numérico de los factores de intensificación de tensiones	167
5. Un test numérico	169
6. Conclusiones	171

**Estudio elastoplástico tridimensional de fisuras por fatiga**

1. Introducción	179
2. Metodología de trabajo	180
3. Presentación de resultados y discusión	183
4. Conclusiones	188

# *I - Fractura Elástica*

## METODOS NUMERICOS PARA EL ESTUDIO DE SINGULARIDADES EN ELASTICIDAD LINEAL

F. MICHAVILA

y

L. GAVETE

*Dpto. de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos  
E.T.S. Ingenieros de Minas. Universidad Politécnica  
C/Rios Rosas, 21  
28003 Madrid*

### 1. INTRODUCCION

Como es conocido, los materiales rompen más fácilmente al ser sometidos a ciertas condiciones de trabajo que o bien reducen su resistencia a la fractura o hacen aparecer ciertas fisuras a partir de las cuales se produce la fracturación.

Es por ello que un buen conocimiento de todo aquello relacionado con las fisuras (origen, comportamiento, forma de avance, etc.) presenta un evidente interés para el ingeniero actual. En efecto, el estudio de la teoría de fractura podrá permitir concebir piezas y estructuras menos sobredimensionadas que las actuales y una fiabilidad igual o mayor.

Esto explica, en parte, el auge que en los últimos tiempos ha cobrado la mecánica de fractura. No obstante, y a pesar de la gran cantidad de trabajos publicados sobre el tema, los conocimientos actuales en mecánica de fractura distan de ser completos.

En mecánica de medios continuos se trata de aproximar los desplazamientos (y eventualmente tensiones y deformaciones) sufridos por un material determinado, sometido a unas sollicitaciones exteriores también determinadas. La mecánica de la fractura estudia el efecto de las fisuras sobre la respuesta de una determinada estructura, entendiendo por fisura una superficie de discontinuidad para el campo de los desplazamientos.

Así, en la Figura 1 (Modo I) se pueden distinguir tres zonas alrededor de una grieta:

- a) *Zona 1 de elaboración*: Pequeña (de unos pocos cristales) caracterizada por fenómenos de ruptura cristalina discontinuos.
- b) *Zona 2 singular*: donde los campos mecánicos son continuos pero caracterizados casi exclusivamente por la presencia de la fisura (independientes de la geometría lejana del

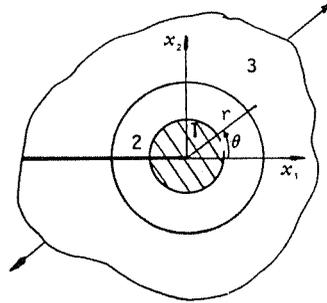


Figura 1.

cuerpo).

- c) *Zona 3 de campos lejanos*: sólo calculables mediante métodos numéricos y variables de un problema a otro.

Hay dos teorías fundamentales para abordar el problema de los cuerpos fisurados: fractura frágil y fractura dúctil. Ver Diez<sup>8</sup>. Vamos a limitar este trabajo al caso de la mecánica de la ruptura frágil. En este caso se supone que la zona 1 se reduce a un punto y las 2 y 3 permanecen elásticas. Resolviendo, entonces, las ecuaciones de Lamé (ecuaciones de equilibrio mecánico) junto con una ley de comportamiento elástico lineal homogéneo e isótropo y con la relación deformaciones-desplazamientos, se tiene:

$$\mathbf{D}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{en } \partial\Omega_1$$

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{en } \partial\Omega_2 \quad (1)$$

y además:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Se pueden determinar los campos singulares (zona 2) resultando éstos de la forma:

$$\begin{aligned} u_i &= K_I \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i(\theta) + K_{II} \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta) \\ \sigma_{ij} &= K_I \frac{1}{\sqrt{(2\pi r)}} f_{ij}(\theta) + K_{II} \frac{1}{\sqrt{(2\pi r)}} g_{ij}(\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

siendo  $f_i, g_i, f_{ij}, g_{ij}$  conocidas y sólo dependientes de constantes del material y de la hipótesis plana adoptada: deformaciones o tensiones planas.

Las ecuaciones anteriores son el equivalente elástico de las obtenidas para el problema de Poisson e indican que la regularidad del campo de desplazamientos es menor que la que aparece en un dominio sin fisuras, o bien que las tensiones, en teoría, se hacen infinitas en el fondo de la fisura.

Las fórmulas (2) ponen en evidencia que en las cercanías del punto singular las tensiones van a crecer indefinidamente viniendo determinada su curva de crecimiento en función de  $r$  por el primer sumando de dichas fórmulas.

Asímismo, las fórmulas (2) ponen de manifiesto que las características geométricas y de carga del material influirán en el desplazamiento de la fisura tan sólo a través del factor  $K_I$ .

Un criterio de fractura es una relación que establece en qué condiciones la fisura avanzará. En mecánica de la fractura frágil, todos los criterios de fractura se relacionan con los llamados factores de intensificación de tensiones  $K_I$  y  $K_{II}$  (y  $K_{III}$  para el modo antiplano) de modo que un criterio general es de la forma, para el modo I de la Figura 1:

$$K_I < K_{Ic} \quad (3)$$

que es la tenacidad en modo I, constante del material. El problema es por tanto, aproximar los factores de intensificación de tensiones, para lo cual hay que aproximar previamente los campos de desplazamientos o de tensiones. Esto motiva el empleo de métodos numéricos especiales al objeto de soslayar el problema de la singularidad en dichos campos.

Señalemos que las hipótesis hechas no son tan restrictivas como pudiera parecer a priori en la fractura frágil, si nos situamos en estudios bidimensionales de piezas metálicas.

En efecto, la hipótesis de elasticidad lineal conlleva el que en el entorno del punto singular no aparezca una zona plástica, pues, si apareciera dicha zona plástica, las ecuaciones (2) perderían en ella su validez. Esto, que en general no se verifica en los materiales, puede considerarse válido en los metales de reducida ductilidad, ya que por su alto límite elástico, la zona plástica que aparece en el entorno del punto singular es muy reducida frente a las dimensiones del sólido.

La hipótesis de tensión o de deformación plana tampoco quita demasiado interés a lo anterior puesto que ya se ha comprobado que en sólidos tridimensionales que presenten fisuras planas de borde curvo y se hallen cargados en modo I, el campo tensorial responde a fórmulas similares a (2), si bien ahora se deberá aplicar a todo el borde curvo de la fisura y no sólo a un único punto singular.

Por último, la hipótesis de carga en modo I tampoco restringe nuestro estudio pues para otros Modos de carga, como los recogidos en la Figura 2, se obtienen fórmulas similares:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta) + \dots$$

donde  $K$  se denotará como  $K_I, K_{II}$  ó  $K_{III}$  según que el Modo de carga sea el  $I, II$  ó  $III$  respectivamente.

Como una generalización del problema anterior, podemos decir que el comportamiento singular de la solución de un problema de contorno definido en un dominio  $\Omega$ , se refiere a que ésta o alguna de sus derivadas parciales tomen valores infinitamente grandes en puntos de  $\bar{\Omega}$ . Tales problemas aparecen además de en la mecánica de la fractura, en casos de transmisión

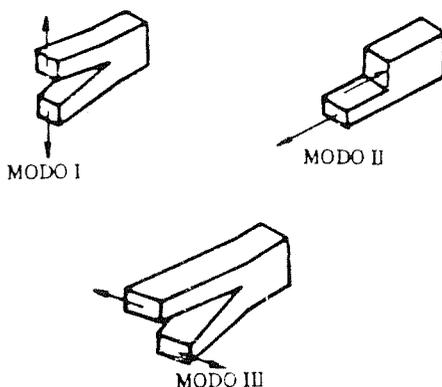


Figura 2.

de calor ó, en general, en cualquier problema de contorno que presente irregularidades en sus datos. Las singularidades son debidas a una forma irregular de la frontera  $\partial\Omega$  ó bien a discontinuidades de las condiciones de contorno (por ejemplo, condiciones mixtas) o bien a otras causas.

Así, si  $\partial\Omega$  posee un punto angular  $P$ , de ángulo interno  $\alpha$  (Figura 3) Carey y Oden<sup>7</sup> determinan que, empleando coordenadas polares  $(r, \theta)$  cuando  $r \rightarrow 0$ , se puede expresar la solución  $u$  mediante un desarrollo en serie de la forma:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\mu_n} \psi_n(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn} \chi_{mn}(r) \psi_n(\theta) \quad (4)$$

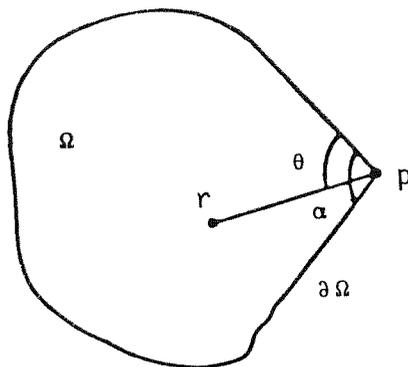


Figura 3.

que contiene términos singulares cuya parte dominante es:

$$r^{\pi/\alpha} \text{sen} \frac{\pi\theta}{\alpha} \quad (5)$$

Si  $\alpha \simeq 2\pi$  se dice que  $\Omega$  tiene una fractura de vértice  $P$ .

## 2. APROXIMACION POR ELEMENTOS FINITOS

El error introducido en la aproximación  $u_h$  mediante el M.E.F. de la solución real  $u$  se produce en todos los problemas dado que:

$$u \approx u_h = \sum_{e=1}^N \sum_{i=1}^n u_i^{(e)} \psi_i^{(e)} = \sum_{I=1}^M U_I \Phi_I$$

en donde  $N$  es el número de elementos finitos del mallado,  $M$  es el número total de nodos del dominio,  $n$  es el número de nodos de un elemento y  $\psi, \Phi$  funciones de aproximación que se utilizan en el M.E.F. Veamos cuál es el error  $e = u - u_h$ .

Hay varias formas de medir la diferencia entre dos funciones  $u$  y  $u_h$ . El error puntual es la diferencia entre  $u$  y  $u_h$  en cada punto del dominio. También podemos definir la diferencia entre  $u$  y  $u_h$  como el máximo de todos los valores absolutos de las diferencias entre  $u$  y  $u_h$  en el dominio  $\Omega$  de que se trate:

$$\|u - u_h\|_{\infty} = \max_{\Omega} |u - u_h|$$

Mientras que el error puntual define una función el  $\infty$ -error nos da un número real.

También se usan de modo más general medidas o normas de la diferencia de dos funciones como la  $L_2$ -norma y la norma de la energía.

Para cualquier función  $u$  y  $u_h$  de cuadrado integrables y definidas en un dominio  $\Omega = [a, b] \in R$ , las dos normas son:

$$L_2 - \text{norma} : \quad \|u - u_h\|_0 = \left\{ \int_{\Omega} |u - u_h|^2 dw \right\}^{1/2}$$

$$\text{norma de la energía} : \quad \|u - u_h\|_1 = \left\{ \int_a^b \sum_{i=0}^m \left| \frac{d^i u}{dx^i} - \frac{d^i u_h}{dx^i} \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

en donde  $2m$  es el orden de la ecuación diferencial a resolver. Estas definiciones se extienden fácilmente a dominios  $\Omega$  en  $R^2$  y  $R^3$ . La última norma se denomina de la energía dado que contiene derivadas del mismo orden que la funcional que en problema de elasticidad representa la energía.

La solución  $u_h$  del problema mediante el M.E.F. se dice que converge en cada una de las normas anteriores a la solución real y si:

$$\|e\| = \|u - u_h\| \leq Ch^p \quad ; \quad p > 0$$

en donde  $C$  es una constante independiente de  $u$  y  $u_h$ ; y  $h$  es una longitud característica ligada al tamaño del diámetro del elemento. La constante  $p$  se denomina orden de convergencia.

Cuando los valores de la solución  $u$ , de un problema definido por una ecuación diferencial, o alguna de sus derivadas se aproxima al infinito en puntos, líneas o superficies de un dominio  $\Omega$ , la solución se dice que posee una "singularidad" en dicha zona del dominio

$\Omega$ . La aproximación de funciones con singularidades presenta grandes dificultades dado que se modifica fuertemente el orden de convergencia  $p$  de las normas definidas anteriormente. (Esto ocurre en problemas de fractura).

Para problemas elípticos de 2º orden como los formulados en (1) es conocido que con un método de elementos finitos estandar, si  $r \geq 3$ , la acotación del error cometido para una de las componentes  $u$  de los desplazamientos  $(u, v)$  en los casos bidimensionales:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \|u\|_r h^k \quad (6)$$

(Similar expresión se obtiene para la otra componente  $v$  y su aproximada  $v_h$ ) donde  $k$  es el grado de los polinomios completos ( $k = 1$  para elementos triangulares de 3 nodos o cuadrilaterales de 4 nodos y  $k = 2$  para elementos triangulares de 6 nodos o cuadrilaterales de 8 nodos).

La existencia de singularidades en el contorno modifica el resultado de convergencia (6). Así, empleando polinomios completos de grado  $k$ , el orden de convergencia establecido por Carey y Oden<sup>7</sup> en  $H^1(\Omega)$  global para  $\Omega$  rectangular es:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^{\min(K,2)-\varepsilon} \|u\|_{3-\varepsilon,\Omega} \quad (7)$$

Para  $\Omega$  en forma de  $L$ :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^{2/3-\varepsilon} \|u\|_{5/3-\varepsilon,\Omega} \quad (8)$$

Para  $\Omega$  con fisura:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^{1/2-\varepsilon} \|u\|_{3/2-\varepsilon,\Omega} \quad (9)$$

Las expresiones (7), (8) y (9) representan el menor orden de convergencia posible, al estar referidas a  $\Omega$  globalmente.

De un modo local Schatz y Wahlbin<sup>24</sup> establecen que si llamamos (Figura 4):

$$\beta_j = \frac{\pi}{\alpha_j} \quad , \quad \beta_m = \sup_j \beta_j$$

en el dominio  $\Omega$  de frontera poligonal de dicha figura y si  $\Omega_j$  es la intersección de  $\Omega$  con un disco centrado en el nodo  $j$  tal que  $\Omega_j$  no contiene otro punto angular y si  $\Omega_0 = \Omega - (\cup_{j=1}^7 \Omega_j)$  se tiene en  $\Omega_0$ :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega_0} \leq C h^k$$

o bien

$$\|u - u_h\|_{\infty,\Omega_0} \leq C h^{k+1}$$

y en cada  $\Omega_j$ :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega_j} \leq C_\varepsilon h^{\min(k+1,\beta_j)-\varepsilon} \quad (10)$$

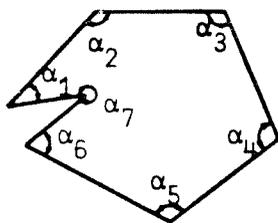


Figura 4.

o bien:

$$\|u - u_h\|_{\infty, \Omega_j} \leq C_\varepsilon \cdot h^{\min(k+1, \beta_j) - \varepsilon}$$

De la misma forma se obtienen acotaciones  $L^\infty$  del error que son muy útiles en numerosos casos.

Muchos autores han realizado recopilaciones y resúmenes de los métodos existentes para tratar singularidades en problemas de contorno para ecuaciones en derivadas parciales. En otros puede citarse Whiteman y Akin<sup>28</sup>, Atluri<sup>4</sup>, Gavete<sup>11</sup> y Michavila<sup>17</sup>. Podemos agrupar dichos métodos del siguiente modo:

- a) Métodos que emplean un refinamiento local del mallado.
- b) Métodos consistentes en un aumento del espacio de funciones test (mediante la incorporación de funciones singulares a la base del subespacio aproximador). Estos métodos son empleados en raras ocasiones debido a que las funciones singulares no suelen conocerse de forma explícita para problemas elípticos en general.
- c) Métodos basados en el uso de elementos singulares, que a su vez, se pueden clasificar en:
  - c1) Empleo de elementos isoparamétricos degenerados obtenidos por desplazamiento de nodos.
  - c2) Elementos que incorporan la singularidad a través del cambio en la forma del elemento y coordenadas de los puntos nodales.
  - c3) Modificación de las funciones de base que son transformadas en polinomios racionales.

Entre los del tipo c1) están los elementos con nodos a "1/4", desarrollados al mismo tiempo y de forma independiente por Barsoum<sup>6</sup> y Henshell y Shaw<sup>13</sup>, los elementos cúbicos con nodos a "1/9" y "4/9" de Pu, Hussain y Lorensen<sup>23</sup>, los elementos de transición de Lynn e Ingrassia<sup>15</sup>, los elementos completos de Manu<sup>16</sup> y otras variantes nuestras<sup>19</sup>.

En el tipo c2) se incluyen los elementos desarrollados para problemas escalares por Aalto<sup>1</sup> y para elasticidad lineal por Whiteman, Michavila, Gavete y Diez<sup>29, 9, 16</sup>.

En el tipo c3) se incluyen los elementos desarrollados por Akin<sup>2, 3</sup>, los de Stern<sup>25</sup>, etc.

En cuanto a su aplicación diremos en general que los del apartado c1) sólo sirven para singularidades cuyos gradientes son de la forma  $r^{-1/2}$  siendo  $r$  la distancia al punto singular, es decir para problemas de fractura. Los del apartado c2) y c3) desarrollados hasta ahora

sólo sirven para singularidades en conjuntos no convexos, debido a la presencia de “vértices entrantes”. Es decir, que los elementos singulares son específicos del tipo de singularidad siendo más generales los de los grupos c2) y c3) que los del grupo c1), aunque estos últimos son muy exactos. Los del grupo c3) presentan problemas en su aplicación y son poco exactos (ver ref. 21) por lo que no se utilizan.

### 3. REFINAMIENTO DEL MALLADO

Los métodos de refinamiento local del mallado consisten en el empleo de elementos de diámetro más pequeño en el entorno de los puntos singulares. Esta técnica no requiere modificación especial en los programas estandar de elementos finitos pero es muy costosa. El número de niveles de refinamiento empleados se controla automáticamente mediante leyes predeterminadas.

Para ello, si consideramos un entorno  $\Omega_M$  del punto angular, de ángulo interior máximo, Schatz y Wahlbin<sup>24</sup> general un refinamiento del mallado tal que:

$$\|u - u_h\|_{\infty, \Omega_M} \leq C_\epsilon \cdot h^{k+1-\epsilon}$$

Ello requiere que los diámetros de los elementos próximos a dicho punto sean menores que  $h$ , esto es lo que se denomina refinamiento del mallado. Llamando  $h_{M,r}$  al tamaño local del elemento:

$$h_{M,r} \leq h(2^{-r})^{(1-\beta_M/k+1)} \quad r = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Con este mallado se obtiene:

$$\|u - u_h\|_{\infty, \Omega_M} \leq C \cdot h^{-\epsilon} (h^{k+1} + \|u - u_h\|_{-p, \Omega}) \quad p \in \mathbb{Z}_+$$

El segundo sumando del segundo miembro contiene los efectos de otros vértices (llamados efectos “polución”) y si  $p$  es suficientemente elevado:

$$\|u - u_h\|_{-p, \Omega} \leq C \cdot h^{\min(2k, 2\beta_M - 1) - \epsilon} \quad (12)$$

un refinamiento local se requiere para evitar tal efecto.

Una alternativa frente a esta subdivisión geométrica de los elementos consiste en fijar el tamaño de los mismos y, por el contrario, aumentar el grado del polinomio aproximador en los elementos finitos de modo que mejore la exactitud en el entorno de los puntos singulares. En particular, se pueden alterar las funciones de forma de los elementos finitos para crear un orden jerárquico. Esta propiedad ha sido utilizada por Szabo<sup>26</sup> en sus programas de elementos finitos.

Recordando los resultados del apartado 2, y, en particular, la expresión (6) si la malla se refina uniformemente de  $h$  a  $h/2$ , el error  $e_1$  en la malla  $M_1$  disminuye hasta  $e_2$  para la malla  $M_2$ , siendo:

$$\|e_2\|_{m, \Omega} \leq C_1 (h/2)^P \|u\|_{r, \Omega} \simeq 2^{-p} \|e_1\|_{m, \Omega} \quad (13)$$

Si se fija la malla con un diámetro  $h$ , y el grado del elemento se aumenta a  $k + 1$ , entonces para  $r$  suficientemente grande el orden de convergencia será  $p + 1$  y tenemos para la estimación del error

$$\|e_2\|_{m,\Omega} \leq C_2 h^{p+1} \|u\|_{p+1,\Omega} \simeq C_3 h \|e_1\|_{m,\Omega} \quad (14)$$

A pesar de que  $C_2$  y  $C_3$  dependen de  $p$  y no se puede obtener una conclusión definitiva del efecto que se produce sobre  $p$ , las fórmulas (13) y (14) sugieren que un aumento del grado del polinomio aproximador puede reducir más el error que el empleo de un mallado más fino. Los tipos de convergencia se denominan  $h$ -convergencia y  $p$ -convergencia. Un desarrollo exhaustivo del tema de la  $h$ -convergencia y de la  $p$ -convergencia así como su bibliografía puede verse en Carey y Oden<sup>7</sup>.

La siguiente estimación del error ha sido obtenida por Babuska y Dorr<sup>5</sup>

$$\|u - u_h\| \leq C h^{\min(p,m-1)} p^{-(m-1)+\varepsilon} \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad (15)$$

en donde  $p$  es el grado del polinomio completo de la función de forma empleada y  $m$  es una medida del grado de regularidad de la función. Se ve que el método converge (aún en presencia de singularidades) si  $h \rightarrow 0$  ó  $p \rightarrow \infty$ , ó ambos,  $h \rightarrow 0$  y  $p \rightarrow \infty$ .

#### 4. AUMENTO DEL ESPACIO CON FUNCIONES SINGULARES

En los métodos basados en el aumento del espacio de funciones test, las funciones de base adicionales están definidas de forma singular cerca del punto estudiado y tienen globalmente sobre  $\Omega$  la continuidad deseable. Si la solución  $u(r, \theta)$  la escribimos de la forma:

$$u(r, \theta) = \sum_{j=1}^N A_j \rho_j(r, \theta) + w(r, \theta)$$

en donde  $A_j$  son constantes y  $w \in H^2(\Omega)$ : el primer término del segundo miembro representa la parte singular de la solución siendo  $\rho_j$  funciones singulares de la forma:

$$\rho_j(r, \theta) = \begin{cases} r^{\mu_j} \text{sen} \mu_j \theta & 0 \leq r \leq r_0 \\ \gamma_j(r) \text{sen} \mu_j \theta & r_0 \leq r \leq r_1 \\ 0 & r_1 \leq r \end{cases} \quad (16)$$

en donde las funciones  $\gamma_j(r)$  son tales que  $r^{\mu_j}$  cae a cero mediante una curva regular.

Si las funciones  $\rho_j$  son conocidas a priori, se pueden utilizar en el método de elementos finitos aproximaciones de la forma:

$$u_h = \sum_{j=1}^N A_j^h \rho_j + w_h$$

en donde  $w_h$  representa la aproximación estandar de los elementos finitos. El subespacio aproximador  $H^h$  de  $H_0^1(\Omega)$  que se origina contiene  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N, N_1, N_2, \dots, N_M\}$  en donde

$\{N_j\}_{j=1}^M$  son las funciones de base globales y hemos aumentado el subespacio aproximador con las  $N$  funciones  $\rho_j$ .

Fácilmente se demuestra que el error entonces satisface un estimativo de la norma

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch^k \|w\|_k \quad (17)$$

es decir, que se restablece el orden de convergencia. El añadido de la función singular (16) permite preservar el orden de convergencia del método. Lo mismo se puede hacer empleando diferencias finitas en vez de elementos finitos en la resolución de un problema. En cuanto a la bibliografía sobre el tema, puede consultarse en Fix<sup>10</sup> y Piang y Tong<sup>22</sup>.

El método no se usa actualmente debido a que se requiere un programa de ordenador particular para cada tipo de singularidad dado que al variar la aproximación, las matrices que se obtienen son diferentes en cada caso, además se pierde la estructura de banda de la matriz de rigidez y se crean problemas de mal-condicionamiento que hacen difícil la resolución de los problemas.

## 5. ELEMENTOS SINGULARES

Constituyen hoy la forma más popular de tratar los problemas de singularidades y su desarrollo ha sido bastante reciente. Además su relación con la mecánica de la fractura origina la existencia de un gran interés en el tema de sus aplicaciones industriales, ya que a partir de ellos se puede calcular con exactitud el denominado “factor de intensificación de tensiones” que determina cuando una grieta de un material elástico comienza a propagarse y conduce al fallo de dicho material.

### 5.1. Elementos isoparamétricos degenerados obtenidos por desplazamiento de nodos

Los elementos isoparamétricos degenerados, que fueron introducidos por Barsoum<sup>6</sup> y Henshell y Shaw<sup>13</sup> se pueden formar en un programa standar de elementos finitos que emplee elementos isoparamétricos, mediante una adecuada localización de los nodos. Diversos resultados y aplicaciones de estos elementos se pueden encontrar en Michavila, Gavete y Conde<sup>20</sup>, Michavila y Gavete<sup>16</sup> y Diez, Gavete y Michavila<sup>9</sup>. Dichos elementos isoparamétricos degenerados son de la forma cuadrangular o triangular.

La obtención de un elemento cuadrangular de ocho nodos isoparamétrico degenerado se realiza del modo siguiente: sea la Figura 5, en el lado 1-5-2 las funciones de forma requeridas para la aproximación son:

$$\begin{aligned} N_1 \Big|_{1-5-2} &= -\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda) \\ N_2 \Big|_{1-5-2} &= \frac{1}{2}\lambda(1+\lambda) \\ N_3 \Big|_{1-5-2} &= 1-\lambda^2 \end{aligned} \quad (18)$$

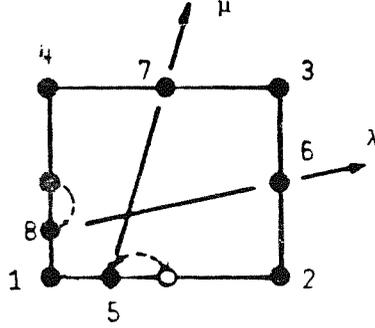


Figura 5.

de modo que la transformación de coordenadas según este eje es:

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)\mathbf{x}_2 + (1-\lambda^2)\mathbf{x}_5$$

Si se toma  $\mathbf{x}_1 = 0$ ,  $\mathbf{x}_5 = \frac{\iota}{4}$  y  $\mathbf{x}_2 = \iota$  (es decir, el nodo intermedio se coloca a "1/4" del lado):

$$\mathbf{x} = \frac{\iota}{2}[\lambda(1+\lambda) + \frac{1}{2}(1-\lambda^2)]$$

luego:

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\iota}} - 1$$

y

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = \frac{\iota}{2}(1+\lambda) = \sqrt{\mathbf{x}\iota}$$

La aproximación de la solución 1-5-2 es:

$$\hat{u}_h(\lambda, \mu)|_{1-2} = -\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)u_1 + \frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)u_2 + (1-\lambda^2)u_5$$

y en el elemento  $\Omega_e$ , genérico del mallado:

$$u_h^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{1-2} = -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\iota}} - 1\right] \left[2 - 2\sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\iota}}\right] u_1^\epsilon + \frac{1}{2} \left[-1 + 2\sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\iota}}\right] 2\sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\iota}} u_2^\epsilon + 4 \left[\sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\iota}} - \frac{\mathbf{x}}{\iota}\right] u_5^\epsilon$$

y su derivada:

$$\frac{du_h^\epsilon}{d\mathbf{x}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{\sqrt{\mathbf{x}\iota}} - \frac{4}{\iota}\right] u_1^\epsilon + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}\iota}} + \frac{4}{\iota}\right] u_2^\epsilon + \left[\frac{2}{\sqrt{\mathbf{x}\iota}} - \frac{4}{\iota}\right] u_5^\epsilon \quad (19)$$

es decir, presenta un comportamiento  $O(r^{-1/2})$  en el entorno del punto singular. Similar resultado se obtiene respecto a la coordenada "y" y al desplazamiento  $v_h^\epsilon$ .

El elemento triangular de seis nodos se obtiene directamente del anterior, cuadrilátero de ocho nodos, colapsando el lado 1-8-4 (Figura 6). El resultado es similar al antes obtenido y, por tanto, el comportamiento radial en el entorno del nodo 1 es también de la forma  $O(r^{-1/2})$ .

Un estudio del comportamiento radial de estos elementos isoparamétricos (degenerados o no) ha sido realizado por Thomson y Whiteman<sup>27</sup> de forma sistemática. Los resultados más importantes obtenidos son:

- a) Cuadrilátero con nodos a "1/4". En este caso la singularidad que aparece es del orden  $r^{-1/2}$  salvo que los lados del elemento sean rectos y estén sobre los ejes  $x$  e  $y$ . Sin embargo, aún en este caso, la singularidad en sentido radial entre los ejes " $x$ " e " $y$ " no es del orden  $r^{-1/2}$ .

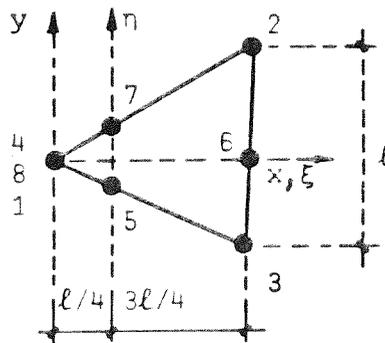


Figura 6.

- b) Triángulo con nodos a "1/4", que proviene de haber colapsado un cuadrilátero con nodos a "1/4". En este caso, la singularidad que aparece para cualquier sentido radial es del orden de  $r^{-1/2}$ , en el caso en que el lado colapsado coincida con el punto singular.
- c) Triángulo de 6 nodos a "1/4". En este caso la singularidad conseguida en el punto singular es del orden de  $r^{-1/2}$ .

Con los elementos degenerados se pueden aproximar singularidades de la forma  $r^\lambda$ ,  $\lambda = 1/2$ . Es decir, fisuras o grietas en el contorno.

Una variante del método de los elementos isoparamétricos degenerados consiste en el empleo de elementos de transición entre el elemento singular y los elementos normales de la red. En dichos elementos de transición los nodos situados en los puntos medios de los lados del elemento se desplazan a posiciones intermedias entre 1/2 y 1/4 de modo que la singularidad tenga lugar fuera del elemento y sea precisamente en el nodo elegido del elemento degenerado contiguo. Esta técnica fue introducida por Lynn e Ingrassia<sup>15</sup> y diversos resultados sobre la mejora de la aproximación debida a dichos elementos se presentan en Michavila y Gavete<sup>16</sup>.



$$y_8 = a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \cdot \text{sen} \alpha$$

Vamos a realizar una formulación general del problema utilizando dos elementos isoparamétricos cuadráticos para modelizar la singularidad que tiene lugar cuando  $\pi/2 < \alpha \leq \pi$  y posteriormente estudiaremos el caso particular de fractura que tiene lugar cuando  $\alpha = \pi$ .

Según (20) podemos calcular  $\{\alpha_i\}_{i=1}^8$  y  $\{\gamma_i\}_{i=1}^8$  así:

$$\alpha_1 = 0 \quad ; \quad \alpha_2 = 2a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} - \frac{1}{2}a \quad ; \quad \alpha_3 = 2a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} - \frac{1}{2}a \cos \alpha$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}a - a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \quad ; \quad \alpha_5 = \frac{1}{2}a - a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \cos \alpha \quad ;$$

$$\alpha_6 = -\frac{1}{4}a - \frac{3}{4}a \cdot 2^{\alpha/\Pi} \cdot \cos^{\Pi/2} - \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} a \cos \alpha +$$

$$+ a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \cos \left(\frac{2\alpha}{\Pi} \text{arc tg} \left(\frac{1}{2}\right)\right) + \cos \left(\frac{2\alpha}{\Pi} \text{arc tg} 2\right);$$

$$\alpha_7 = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a \cdot 2^{\alpha/\Pi} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}a \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2}a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} - \frac{1}{2}a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \cos \frac{2\alpha}{\Pi} \text{arc tg} 2 \quad ;$$

$$\alpha_8 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a \cdot 2^{\alpha/\Pi} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} - \frac{1}{4}a \cos \alpha - \frac{1}{2}a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \cos \frac{2\alpha}{\Pi} \text{arc tg} \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = 0 \quad ; \quad \gamma_2 = 0 \quad ; \quad \gamma_3 = 2a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \text{sen} \alpha \quad ; \quad \gamma_4 = 0 \quad ;$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{2}a \text{sen} \alpha - a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \text{sen} \alpha = \frac{1}{2}a - a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \text{sen} \alpha \quad ;$$

$$\gamma_6 = -\frac{3}{4}a \cdot 2^{\alpha/\Pi} \cdot \text{sen} \alpha / 2 - \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} a \text{sen} \alpha + a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \text{sen} \left(\frac{2\alpha}{\Pi} \text{arc tg} \left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$+ \text{sen} \left(\frac{2\alpha}{\Pi} \text{arc tg} 2\right) \quad ;$$

$$\gamma_7 = \frac{1}{4}a \cdot 2^{\alpha/\Pi} \text{sen} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}a \text{sen} \alpha - \frac{1}{2}a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \text{sen} \frac{2\alpha}{\Pi} \text{arc tg} 2 \quad ;$$

$$\gamma_8 = \frac{1}{4}a \cdot 2^{\alpha/\Pi} \text{sen} \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2}a \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha/\Pi} - \frac{1}{4}a\right) \text{sen} \alpha - \frac{1}{2}a \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha/\Pi} \text{sen} \frac{2\alpha}{\Pi} \text{arc tg} \left(\frac{1}{2}\right)$$

Ahora bien, vemos que para que la mayor parte de estos valores se anulen, debe ser  $\alpha = \Pi$  (caso de fractura) en cuyo caso tendríamos el elemento de la Figura 8 con:

$$y_4 = y_8 = y_1 = y_5 = y_2 = 0 \quad ; \quad y_6 = y_7 = a \quad ; \quad y_3 = 2a$$

$$x_1 = x_3 = 0 \quad ; \quad x_5 = a/4 \quad ; \quad x_2 = a \quad ; \quad x_6 = 3a/4$$

$$x_7 = -3a/4 \quad ; \quad x_8 = -a/4 \quad ; \quad x_4 = -a$$

Luego:

$$x(\lambda, \mu) = \frac{a}{4}(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$y(\lambda, \mu) = \frac{a}{2}\lambda\mu$$

de donde

$$r = \frac{a}{4}(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$|J| = \frac{a^2}{4}(\lambda^2 + \mu^2)$$

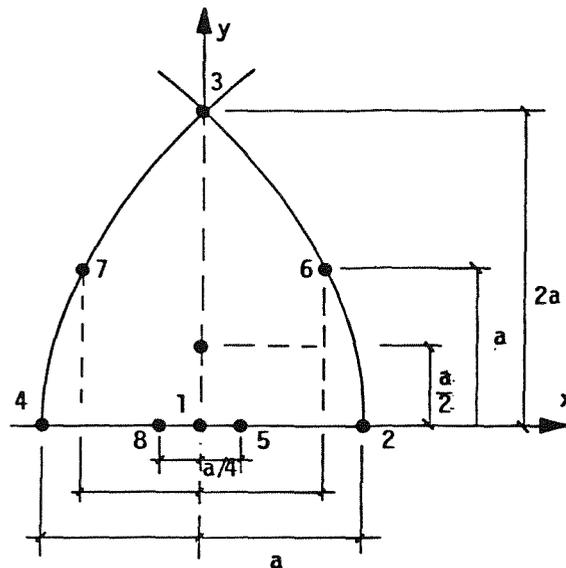


Figura 8.

Los valores de las deformaciones serán:

$$E_{22} = \frac{\delta_3\lambda + \delta_2\mu + \delta_6\lambda^2 + 2(\delta_4 + \delta_5)\lambda\mu + \delta_6\mu^2 + \delta_7\lambda^3 + 2\delta_8\lambda^2\mu + 2\delta_7\lambda\mu^2 + \delta_8\mu^3}{\frac{a}{2}(\lambda^2 + \mu^2)} \quad (21)$$

$$E_{11} = \frac{\beta_2\lambda - \beta_3\mu + 2\beta_4\lambda^2 - 2\beta_5\mu^2 + \beta_7\lambda^2\mu - \beta_8\lambda\mu^2}{\frac{a}{2}(\lambda^2 + \mu^2)} \quad (22)$$

$$E_{12} = \frac{(\delta_2 - \beta_2)\lambda + 2(\delta_4 - \beta_4)\lambda^2 - (\delta_3 + \beta_3)\mu - 2(\delta_5 + \beta_5)\mu^2}{a(\lambda^2 + \mu^2)} - \frac{2\beta_6\lambda\mu + (\delta_7 - 3\beta_7\lambda^2\mu) - (\delta_8 + 3\beta_8)\lambda\mu^2}{a(\lambda^2 + \mu^2)} \quad (23)$$

### 5.3. Elementos singulares generados mediante la modificación de las funciones de base

Un método de generación de elementos singulares bidimensionales fue introducido por Akin<sup>2</sup>. Consiste en la modificación de las funciones de forma sin alterar la localización de los nodos.

Con estos elementos singulares es posible aproximar singularidades de la forma  $0(r^{-\alpha})$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Por esta técnica se generan elementos singulares a partir de elementos estandar de cualquier orden, es decir, no se requiere de ninguna manera el empleo necesariamente de elementos cuadráticos. Así con un mallado formado por elementos lineales triangulares o bilineales cuadrilaterales es posible estudiar el comportamiento de puntos singulares.

En general, para problemas bidimensionales, las funciones de forma para los elementos de tipo Akin se generan del modo siguiente:

La singularidad  $r^{-\alpha}$  en un nodo del elemento  $\hat{\Omega}$  (supongamos, el nodo 1) se obtiene reemplazando las funciones de forma estandar  $\{N_j\}_{j=1}^N$  por otras nuevas  $\{H_j\}_{j=1}^N$  generadas a partir de aquellas por el siguiente método, sean:

$$\begin{aligned} W(\lambda, \mu) &= 1 - N_1(\lambda, \mu) \\ R(\lambda, \mu) &= \left(W(\lambda, \mu)\right)^\alpha \end{aligned} \quad (24)$$

donde  $(\lambda, \mu)$  son las coordenadas en  $\hat{\Omega}$ . Las nuevas funciones de forma vienen dadas por:

$$\begin{aligned} H_1(\lambda, \mu) &= 1 - \frac{W(\lambda, \mu)}{R(\lambda, \mu)} \\ H_j(\lambda, \mu) &= \frac{N_j(\lambda, \mu)}{R(\lambda, \mu)} \quad j = 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (25)$$

esto es, funciones racionales. Con ellas, la aproximación de la solución en el elemento singular es:

$$\hat{u}_h(\lambda, \mu) = \sum_{j=1}^N u_j^e \cdot H_j(\lambda, \mu)$$

Estas funciones de forma modificadas  $\{H_j\}_{j=1}^N$  verifican:

- a)  $\sum_{j=1}^N H_j(\lambda, \mu) = 1$
- b) Son compatibles. Es decir, los elementos singular de tipo Akin son conformes con los elementos normales conectados a ellos.

A modo de caso particular, estudiaremos en detalle el elemento triangular de tres nodos. Las funciones de forma estandar  $\{N_i\}_{i=1}^3$  y de Akin  $\{H_j\}_{j=1}^3$  son ahora:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \lambda - \mu & H_1 &= 1 - (\lambda + \mu)^{1-p} \\ N_2 &= \lambda & H_2 &= \lambda(\lambda + \mu)^{-p} \\ N_3 &= \mu & H_3 &= \mu(\lambda + \mu)^{-p} \end{aligned} \tag{26}$$

$$0 \leq \lambda, \mu \leq 1$$

Tendremos por tanto:

$$x(\lambda, \mu) = \sum_i N_i x_i = \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 \mu$$

$$y(\lambda, \mu) = \sum_i N_i y_i = \gamma_1 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 \mu$$

con:

$$\alpha_1 = x_1 \quad ; \quad \alpha_2 = x_2 - x_1 \quad ; \quad \alpha_3 = x_3 - x_1$$

$$\gamma_1 = y_1 \quad ; \quad \gamma_2 = y_2 - y_1 \quad ; \quad \gamma_3 = y_3 - y_1$$

Si hacemos, sin pérdida de generalidad,  $x_1 = y_1 = 0$  (Figura 9), será:

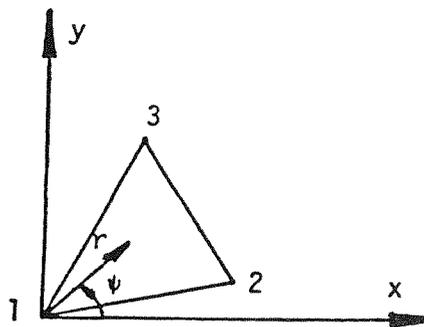


Figura 9.

$$\mathbf{x} = \alpha_2 \lambda + \alpha_3 \mu$$

$$\mathbf{y} = \gamma_2 \lambda + \gamma_3 \mu$$

y a lo largo de una línea radial ( $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \text{cte.}$ ) debe ser:

$$\frac{\lambda}{\mu} = a_1 (= \text{cte}) \quad (27)$$

y proporcional a  $r$ .

Como

$$u_h = \sum_i H_i u_i = [1 - (\lambda + \mu)^{1-p}] u_1 + \lambda (\lambda + \mu)^{-p} u_2 + \mu (\lambda + \mu)^{-p} u_3$$

e igual para  $v_h$

$$E_{11} = ((\lambda + \mu)^{-p} [(p-1)u_1(\gamma_3 + \gamma_2) + u_2\gamma_3 + u_3\gamma_2] - p(\lambda + \mu)^{-p-1}(\gamma_2 + \gamma_3)[u_2\lambda + u_3\mu]) \cdot \frac{1}{\alpha_2\gamma_2 - \alpha_3\gamma_2}$$

y sustituyendo la relación (27):

$$\begin{aligned} E_{11} &= ((1 + a_1)\mu)^{-p} \cdot A_1'' + ((1 + a_1)\mu)^{-p-1} \cdot A_2'' = \\ &= A_1' \mu^{-p} + A_2' \mu^{-p-1} = A_1 r^{-p} + A_2 r^{-p-1} \end{aligned}$$

y en el caso de fractura en  $p = 1/2$ , luego:

$$E_{11} = A_1 r^{-1/2} + A_2 r^{-3/2} \quad (28)$$

Como se ve, el elemento representa correctamente la forma de la singularidad, pero no incluye condiciones de deformación constante (necesarias por ejemplo en termoelasticidad).

La implementación de este elemento en un programa de elementos finitos es simple, sin embargo si se parte de la formulación isoparamétrica hay que tener ciertas precauciones. En efecto, si se modifican sin más las funciones de forma, la interpolación geométrica quedará de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\lambda, \mu) &= \sum_i H_i \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}(\lambda, \mu) &= \sum_i H_i \mathbf{y}_i \end{aligned} \quad (29)$$

Vamos a deducir qué sucede con la deformación en el caso de tener (29) por (26) como interpolación geométrica. Para ello comprobaremos en primer lugar que (29) transforma rectas en rectas. En efecto, pongamos  $a\lambda + b = \mu$ , y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 = 0$ . Entonces:

$$\mathbf{x} = \lambda(\alpha_1\lambda + \alpha_2)^{-p}\mathbf{x}_2 + (a\lambda + b)(\alpha_1\lambda + \alpha_2)^{-p}\mathbf{x}_3$$

$$\mathbf{y} = \lambda(\alpha_1\lambda + \alpha_2)^{-p}\mathbf{y}_2 + (a\lambda + b)(\alpha_1\lambda + \alpha_2)^{-p}\mathbf{y}_3$$

con  $\alpha_1 = a + 1$  y  $\alpha_2 = b$ . Dividiendo:

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \frac{\lambda(\mathbf{x}_2 + a\mathbf{x}_3) + b\mathbf{x}_3}{\lambda(\mathbf{y}_2 + a\mathbf{y}_3) + b\mathbf{y}_3}$$

y si  $b = 0$ , tendremos que la transformada de una línea radial en  $\hat{T}(\hat{r})$  es una línea radial en  $T(r)$ . Por consiguiente, según una línea radial en el plano  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  será:

$$\frac{\lambda}{\mu} = a_1 \text{ (= cte.)}$$

Procediendo como en el caso anterior, y después de algunas manipulaciones, se observa que  $E_{11}$  presenta la forma  $A_1 + A_2r^{-2}$  que no es la correcta.

## 6. UN EJEMPLO

Consideremos un problema de fractura elástico en  $\Omega \subset R^2$ . Sea un problema elíptico que incluye el operador biarmónico.

$$\Delta^2[u(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad ; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega$$

$\Omega \equiv$  dominio de la Figura 10

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad ; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \partial\Omega_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad ; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \partial\Omega_2$$

siendo  $u$  la función de tensiones de Airy.

$$\partial\Omega_2 \equiv (AOG) \cup (CDE) \cup (BA) \cup (GF)$$

$$\partial\Omega_1 \equiv \text{resto del contorno}$$

La condición de contorno  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  representa una zona libre de tensiones.

Ha sido demostrado por Williams<sup>30</sup> que la forma de la función biarmónica que satisface estas condiciones de contorno en coordenadas polares  $(r, \theta)$  con origen 0, es:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1} a_{2n-1} r^{n+1/2} (-\cos(n - \frac{3}{2})\theta + \frac{2n-3}{2n+1} \cos(n + \frac{1}{2})\theta) + (-1)^n a_{2n} r^{n+1} (-\cos(n-1)\theta + \cos(n+1)\theta)]$$

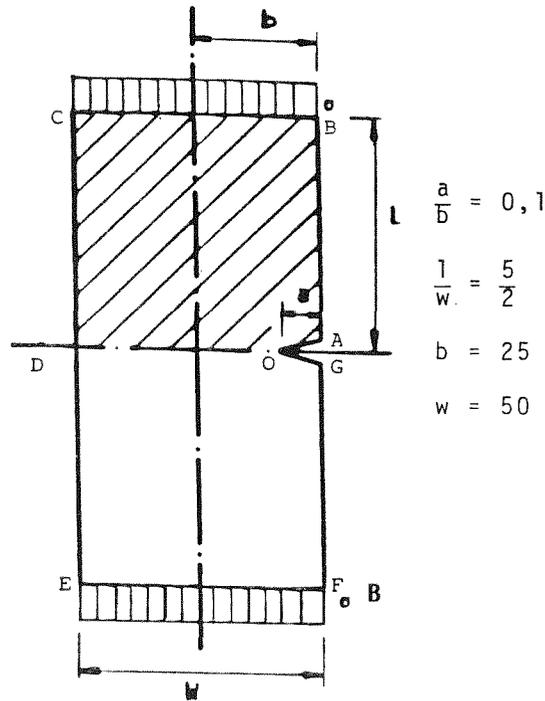


Figura 10.

De la ecuación anterior se deduce que  $u$  tiene derivadas segundas no acotadas, y por tanto una singularidad en el punto 0. En un problema de la elasticidad en  $R^2$  que viene determinado por la ecuación biarmónica, las tensiones se pueden obtener derivando dos veces la función de tensiones de Airy  $u$ .

Irwin<sup>14</sup> sugirió que para este tipo de situaciones (modo de deformación de la grieta) se puede definir el factor de intensificación de tensiones en el entorno del punto singular como:

$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

Comparando esta fórmula con la anterior que podemos poner " $K$ " =  $-\sqrt{2\pi}a_1$ . De modo que conocida  $a_1$  podemos determinar el factor de intensificación de tensiones, que es un parámetro muy importante en el estudio de grietas, dado que indica el valor a partir del cual la fractura progresa rápidamente, extendiéndose la grieta. Por todo ello los métodos para aproximar el valor de  $K$  son de gran interés.

En la zona cercana al punto singular, hemos empleado diferentes modelos tal y como se puede ver en las Figuras 11a), 11b), 12a) y 12b).

Se han realizado modelos utilizando también el elemento singular de Barsoum<sup>6</sup> y Henshell y Shaw<sup>13</sup> e incluyendo el elemento de transición de Lynn e Ingrassia<sup>15</sup> para disminuir el error. En todos los modelos se ha tomado  $c/(c+d) = 0.25$  y  $d = 3c$ .

En los modelos  $C$  y  $D$  se han considerado dos casos, con y sin elemento de transición.

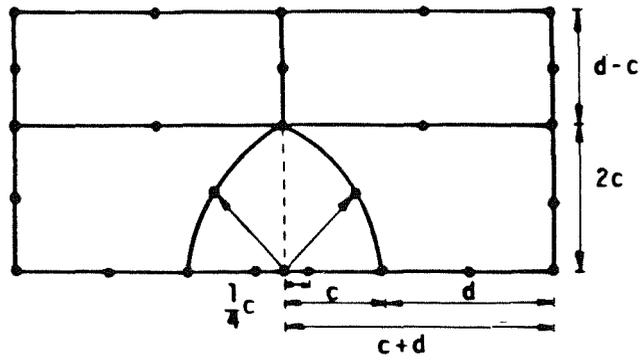


Figura 11(a). Modelo A

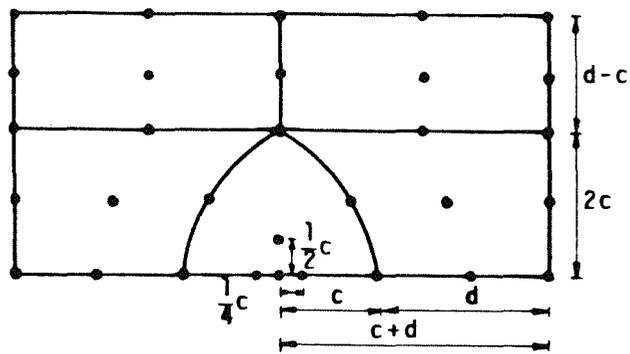


Figura 11(b). Modelo B

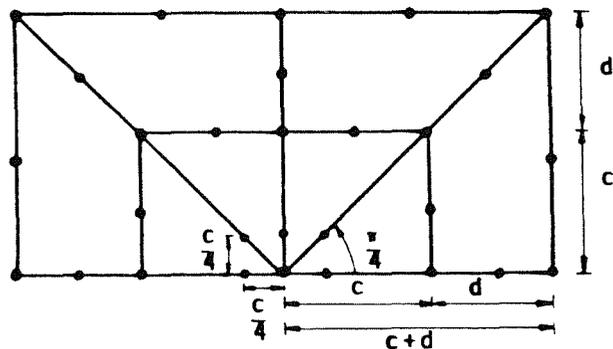


Figura 12(a). Modelo C

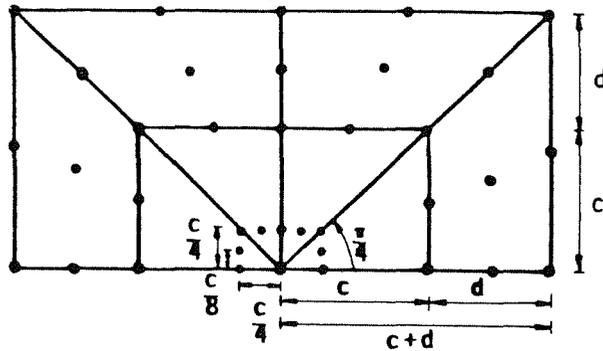


Figura 12(b). Modelo D

En todos los casos se ha empleado el método de correlación de desplazamientos para el cálculo del factor de intensificación de tensiones. Como es sabido este método utiliza las fórmulas de interpolación para los desplazamientos de un lado del elemento finito singular.

Siguiento el método de correlación de desplazamientos para los modelos  $C$  y  $D$  tendremos:

$$K_I = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{\kappa + 1} \frac{4V_B - V_C}{\sqrt{i}}$$

en donde:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

en donde  $V_B$  y  $V_C$  son desplazamientos normales a la grieta del elemento singular,  $\kappa = 3 - 4\nu$  para deformación plana que es el caso estudiado (el desplazamiento perpendicular al plano es nulo),  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson.

Para poder comparar calcularemos  $F(a/b)$  como sigue para los modelos  $C$  y  $D$ :

$$F(a/b) = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{a\pi}} \frac{\sqrt{2/ai}E(4V_B - V_C)}{4(1 - \nu^2)\sigma}$$

en donde  $\sigma$  es la tensión inicial aplicada al dominio.

Para los modelos  $A$  y  $B$ , tenemos

$$r = \frac{C}{4}(\lambda^2 + \mu^2)$$

y para  $\lambda = 0$  se tiene  $\mu = 2\sqrt{\frac{r}{C}}$

De acuerdo con Aalto<sup>1</sup> tenemos (Figura 13):

$$V = V_{III} + (V_{II} - V_{III})(\mu - 1)$$

Entonces:

$$V = V_{III} + (V_{II} - V_{III})\left(-1 + 2\sqrt{\frac{r}{i}}\right)$$

tomando  $i = C$  si consideramos que:

$$V(\theta = 180^\circ) = \frac{1 + \nu}{4E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_I(2\kappa + 2)$$

Tendremos igualando términos en  $\sqrt{r}$

$$K_I = \frac{2E}{(1 + \nu)(\kappa + 1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2(V_{II} - V_{III})}{\sqrt{i}}$$

que se ha utilizado para calcular  $F(a/b)$  en los modelos  $A$  y  $B$ .

Los resultados hallados (los modelos  $C'$  y  $D'$  corresponden a los  $C$  y  $D$  pero considerando además los elementos de transición), demuestran la exactitud obtenida con los modelos de las Figuras 11 y 12:

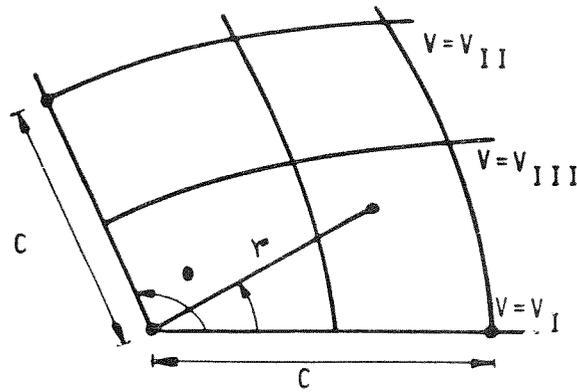


Figura 13.

	Ref. [12]			Modelo A	Modelo B	Modelo C	Modelo C'	Modelo D
	Hellen	Gross	Bowie					
F(a/b)	1.65	1.66	1.68	1.685	1.617	1.645	1.628	1.654
F(a/b)	Modelo D'							
	1.631							

TABLA

REFERENCIAS

1. Aalto, J. Singularity elements for seepage problems. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* Vol. **9**, 185-196, (1985).
2. Akin, J. E. Elements for the analysis of line singularities. *The Mathematics of finite elements with applications*, Vcl. **3**, ed. J. R. Whiteman, Academic Press, London, (1979).
3. Akin, J. E. The generation of elements with singularities. *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. **10**, 1249-1259, (1976).
4. Atluri, S. N. y Nakagaki, M. Computational methods for plane problems of fracture. Chapter 6 in *Computational Methods in the Mechanics of fracture.*, Ed. S. Atluri, Elsevier Science, (1986).
5. Babuska, I. y Dorr, M. Error estimates for the combined  $h$  and  $p$  versions of the finite elements method. *Numer. Math.*, **25**, 257-277, (1981).
6. Barsoum, R. S. On the use of isoparametric finite elements in linear elastic fracture mechanics. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **10**, 25-37, (1976).

7. Carey, G.F., y Oden, J. T. *Finite elements: A second course*, (1983) *Finite elements: Computational Aspects*. Prentice Hall, (1984).
8. Diez, F. Métodos numéricos en problemas elípticos con singularidades. Una recapitulación. *Seminario del Departamento de Cálculo numérico e Informática*. E.T.S. Ingenieros de Minas de Madrid, (1986).
9. Diez, F., Gavete, L. y Michavila, F. Nuevas técnicas de tratamiento de singularidades en campos escalares y vectoriales. III Encuentro del Grupo Español de Fractura. *Anales de Mecánica de la Fractura*, no. **3**, 61-73, (1986).
10. Fix, G. Higher-Order Rayleigh-Ritz approximations, *J. Math. Mech.* Vol. **18**, 645-657, (1969).
11. Gavete, L. Aproximación de singularidades y contornos artificiales en ecuaciones en derivadas parciales. *Tesis Doctoral*. Facultad de Ciencias Matemáticas. UNED, (1988).
12. Gavete, L., Michavila, F., y Diez, F. A new singular finite element in linear elasticity. *Computational Mechanics* (a aparecer).
13. Henshell, R.D., y Shaw, K. G. Crack tip finite elements are unnecessary. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **9**, 495-507, (1975).
14. Irwin, G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack-traversing a plate. *Trans. A.S.M.E. J. Applied Mech.*, **24**, 361-364, (1957).
15. Lynn, P.D., e Ingraffea, A.R. Transition elements to be used with quarter-point crack-tip elements. *Ing. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **6**, 1031-1036, (1978).
16. Manu, C. Complete quadratic isoparametric finite elements in fracture mechanic analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. **21**, 1547-1553, (1985).
17. Michavila, F. On different numerical methods to solve singular boundary problems. *S.I.A.N.*, (1985).
18. Michavila, F. y Gavete, L. On the use of quadratic transition element. *Proceedings of Third Int. Conf. Num. Meth. Fract. Mech.* 95-111. Pineridge Press. Swansea, (1984).
19. Michavila, F. y Gavete, L. Some results in two and three dimensional singular finite elements with applications to fracture mechanics. *Fourth Int. Symposium of Numerical Methods in Engineering. Innovative Numerical Methods in Engineering.* 411-417. Atlanta (Georgia), (1986).
20. Michavila, F., Gavete, L. y Conde, C. Una aplicación de elementos finitos isoparamétricos en la modelización de ciertas singularidades que aparecen en problemas de grietas. *Anales de Ingeniería Mecánica*, **1**. 104-113, (1982).
21. Michavila, F., Gavete, L. y Diez, F. Two different approaches for the treatment of boundary singularities. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, (a aparecer).
22. Pian, T.H.H. y Tong, P. Finite element methods in continuum mechanics, in: *Advances in Applied Mechanics*. Vol. **12**, Academic New York, (1972).
23. Pu, S.L., Hussain, M.A. y Lorensen, W.E. The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **12**, 1727-1742, (1978).
24. Schatz, A.H. y Wahlbin, L.B. Maximum norm estimates in the finite element method on polygonal domains, parts 1 and 2, *Math. Comput.* **32**, **141**, 73-109, (1978) and **33**, **146**, 465-492 (1979).
25. Stern, M. Families of consistent conforming elements with singular derivative fields. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14**, 409-421, (1979).
26. Szabo, B. Some recent developments in finite element analysis. *Comp. Math. Appl.*, **5**,

2. 99-116, (1979).
27. Thompson, G. M., y Whiteman, J.R. Analysis of strain representation in linear elasticity by both singular and nonsingular finite elements. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **2**, 85-104, (1985).
28. Whiteman, J. R., y Akin, J.E. Finite element, singularities and fracture. of J.R. Whiteman (ed.), *The Mathematics of Finite Elements and Applications III, MAFELAP 1978*. Academic Press. London, pp. 35-54, (1979).
29. Whiteman, J. R., Michavila, F., Gavete, L. and Diez, F. *Generalization of the mapping technique of Aalto for producing finite elements with singularities. MAFELAP*, (1987).
30. Williams, M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech.*, **24**, 526-528, (1952).

# *II - Fractura Elastoplástica*

## MODELOS ELASTOPLASTICOS PARA LA SIMULACION NUMERICA DE PROCESOS DE FRACTURA

J. OLIVER

S. OLLER

y

E. OÑATE

*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*

*Universidad Politécnica de Cataluña.*

*Jordi Girona Salgado, 31*

*08034 Barcelona.*

### 1. INTRODUCCION

La fractura es una forma de daño local que se observa en diversos materiales (metales, materiales cerámicos, hormigón, etc.) y que se manifiesta, al menos desde un punto de vista macroscópico, por una falta de continuidad entre partículas en los puntos donde se produce.

El punto de partida para el análisis de los procesos de fractura es la Mecánica de Medios Continuos que, como su propio nombre indica, establece como una hipótesis fundamental la continuidad del medio durante todo el proceso de deformación. En este contexto, la primera alternativa para estudiar los problemas de fractura de una forma coherente con la Mecánica de Medios Continuos, es analizar la parte del medio que es continua, incorporando las discontinuidades (fisuras, grietas, etc.) al contorno del sólido analizado. De ahí surge el grupo de métodos de análisis que utilizan las técnicas y metodología de la Mecánica de Fractura Clásica. Aún con las indudables ventajas de coherencia que tienen estos métodos, y su interés y utilidad en la resolución de muchos tipos de problemas, presentan también algunos inconvenientes relacionados sobre todo con su utilización en el ámbito de métodos numéricos como el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.). Uno de dichos inconvenientes es la necesidad de considerar un contorno en el Medio Continuo que incluya los labios de las fisuras y que, por lo tanto, evolucione a lo largo del proceso de deformación, obligando a la utilización de sofisticadas técnicas de remallado de la estructura discretizada<sup>13,18,26</sup>.

Como una alternativa a las técnicas de Mecánica de Fractura Clásica, en los últimos años ha surgido un grupo de métodos cuyo enfoque del problema es radicalmente distinto.

## II - Fractura Elastoplástica

Estos métodos, que podríamos agrupar bajo el nombre genérico de técnicas de fractura "distribuida" <sup>3,4,6,9,11,15,16,22</sup>, incluyen la fisura en el medio continuo, y consideran campos de desplazamientos continuos para modelarla. La contradicción entre modelar una discontinuidad y hacerlo mediante desplazamientos continuos queda resuelta en el contexto del uso de "métodos de discretización" y, en particular, del Método de los Elementos Finitos.

Como es sabido, el M.E.F. proporciona soluciones aproximadas de las ecuaciones del problema tenso-deformacional, de tal forma que el refinamiento de la malla conduce, bajo ciertas condiciones, a la convergencia de los resultados hacia el valor correcto <sup>2,11,19</sup>. En estas circunstancias, es posible modelar por el M.E.F. un campo de desplazamientos continuo tal que la solución obtenida tienda, con el refinamiento de la malla, hacia una solución, inalcanzable pero aproximable, con desplazamientos discontinuos. Para tal fin, es necesario introducir los mecanismos adecuados tanto en las ecuaciones del problema tenso-deformacional, principalmente las ecuaciones constitutivas, como en las técnicas numéricas de resolución. En general el modelo resultante debe reunir las siguientes características:

- 1) Conducir a lo que se denomina "localización de deformaciones". En un cierto instante del proceso de deformación debe producirse una concentración de las deformaciones en una línea (en el caso bidimensional) o superficie (en el caso tridimensional) que representa a la fisura. En el dominio discretizado, ésto supone la concentración de deformaciones en una "banda singular" de elementos, siguiendo aproximadamente la disposición geométrica de la superficie o línea de fractura que se pretende modelizar. El "salto" de los desplazamientos a un lado y otro de la banda tiende entonces, con el refinamiento de la malla, hacia la discontinuidad deseada (ver Figura 1).
- 2) Producir la adecuada "disipación de energía". Es bien sabido que los procesos de fractura son disipativos, existiendo en ellos un trabajo o energía irrecuperable <sup>2</sup>. En general se acepta la existencia de una propiedad del material, conocida como "Energía de Fractura", que consiste en la energía disipada en la producción de una fisura por unidad de superficie de la misma. La formación de la banda singular comentada más arriba, conduce, si no se toman precauciones especiales, a una disipación de la Energía de Fractura que depende del tamaño de los elementos finitos situados en la banda. Esta circunstancia se conoce en la literatura como falta de "objetividad" <sup>2,3,11,19,21,23</sup> y se manifiesta tanto por una variación de los resultados, con el refinamiento de la malla, mucho mayor que la esperada por meros errores de discretización, como por una falta de convergencia de los mismos.
- 3) Modelar de forma correcta el comportamiento de todo el sólido. Además del comportamiento disipativo "local" en la zona de fractura, pueden producirse otros fenómenos disipativos "no locales", que afectan a cómo y dónde se produce la fisuración y que, por consiguiente, deben ser tenidos en cuenta en el modelo. En otras palabras, no es suficiente con modelar con precisión el fenómeno de la fractura, generalmente asociado a la existencia de estados tensionales de tracción en ciertos puntos, sino que hay que aproximar correctamente el comportamiento de todo el sólido para que el estado

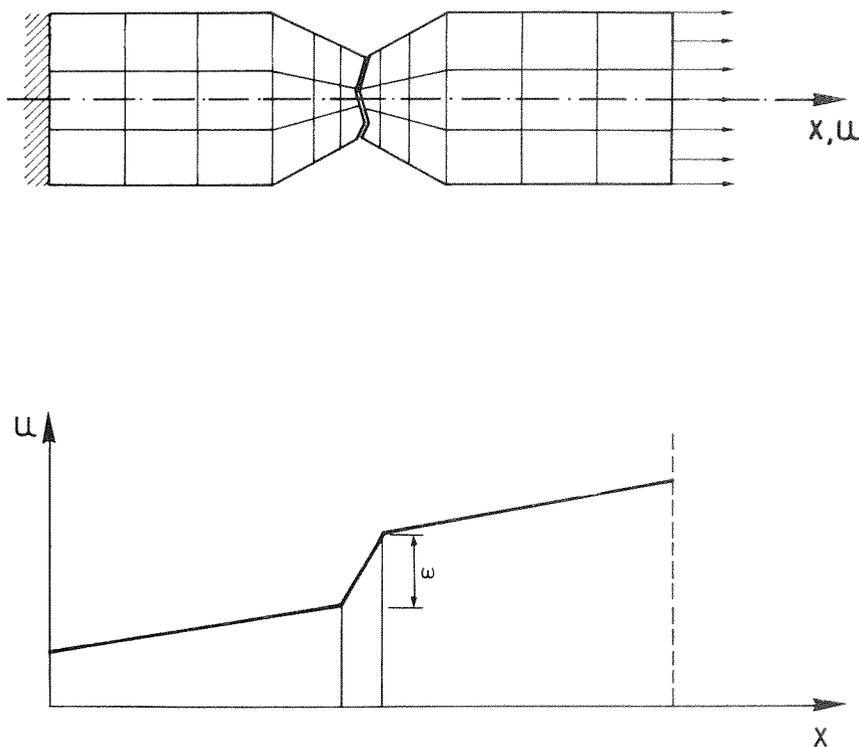


Figura 1. Modelización de una discontinuidad mediante un campo de desplazamientos continuos

tensional obtenido en los puntos de fractura sea el correcto. En estructuras de pequeñas dimensiones esta consideración resulta particularmente importante <sup>2</sup>.

A la vista de lo comentado, la Teoría de la Plasticidad se manifiesta cómo una herramienta adecuada para modelar los fenómenos de fractura. Por una parte, se halla sólidamente cimentada desde el punto de vista matemático constituyendo una formulación bien desarrollada y coherente en el ámbito de las ecuaciones constitutivas. Por otra parte, contiene los elementos necesarios para simular los procesos disipativos y de localización que se han comentado. Esta es, posiblemente, la causa del creciente interés en el desarrollo y utilización de modelos constitutivos elasto-plásticos para la simulación de procesos de fractura y de la aparición, en los últimos años, de un buen número de modelos de este tipo <sup>5,7,8,10,12,14,15,24,25</sup>.

En este artículo se van a estudiar los elementos fundamentales de un modelo elastoplástico de fractura. En una primera parte se analizan los conceptos de localización, ablandamiento por deformación y objetividad como requisitos de un modelo distribuido de fisuración. Posteriormente se presenta la Teoría Matemática de la Plasticidad como herramienta para introducir estos fenómenos en un modelo numérico; finalmente, se describe un modelo elastoplástico para la simulación de la fractura en materiales friccionales así como algunos ejemplos de aplicación.

## 2. ENDURECIMIENTO Y ABLANDAMIENTO POR DEFORMACION.

Consideremos un proceso cuasiestático de deformación en un sólido, que se produce a lo largo del tiempo  $t$ . Sean  $\sigma_{ij}(t)$  y  $\epsilon_{ij}(t)$  los tensores de tensiones y de deformaciones en un punto del sólido. Se dice que en un cierto instante se produce endurecimiento o ablandamiento en dicho punto si:

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad (\text{Endurecimiento}) \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} < 0 \quad (\text{Ablandamiento}) \quad (2)$$

donde el punto superior indica derivación respecto al tiempo y se considera el criterio de suma para índices repetidos.

En un proceso de deformación uniaxial las ecs. (1) y (2) indican una pendiente positiva o negativa, respectivamente, de la curva tensión-deformación (ver Figura 2). El signo = en dichas ecuaciones corresponde al caso de endurecimiento o ablandamiento nulo. En general, los materiales presentan durante su deformación un comportamiento inicial con endurecimiento positivo, una transición con endurecimiento nulo y una zona final de ablandamiento. En materiales frágiles (hormigones, materiales cerámicos, rocas, etc.) el ablandamiento se produce para pequeños valores de la deformación mientras que en materiales dúctiles, como ciertos metales, se produce para niveles grandes de la deformación (ver Figura 2).

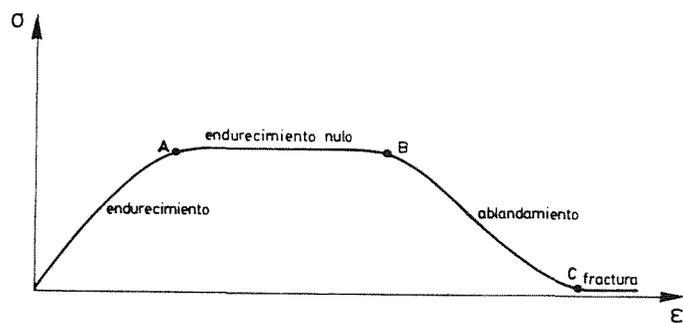
En cualquier caso, para realizar un análisis de fractura, hay que estudiar todo el proceso de deformación puesto que es en la parte final de la rama de ablandamiento donde se produce la fractura, con la consiguiente relajación de las tensiones y crecimiento de las deformaciones. La diferencia fundamental entre los modelos para materiales frágiles y dúctiles es que, en este último caso, al producirse la fractura a grandes niveles de deformación hay que introducir la teoría de la deformación finita en las ecuaciones del problema.

Como se verá en el apartado 5, *la Teoría de la Plasticidad permite introducir el ablandamiento en las ecuaciones constitutivas y proporciona, por consiguiente, uno de los mecanismos necesarios para simular de forma correcta el proceso de fractura.*

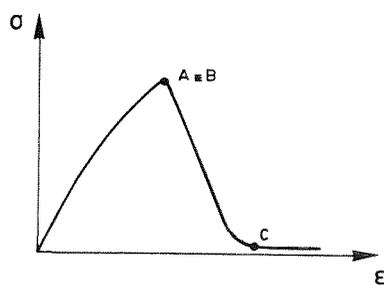
## 3. LOCALIZACION

Se denomina "línea o superficie singular" a una línea en el sólido (en el caso de un análisis bidimensional) o superficie (en el caso tridimensional) a través de la cual los desplazamientos son continuos mientras que los gradientes de dichos desplazamientos son discontinuos (ver Figura 3). Por razones de simplicidad, en lo sucesivo consideraremos el caso bidimensional, siendo inmediata la generalización a tres dimensiones.

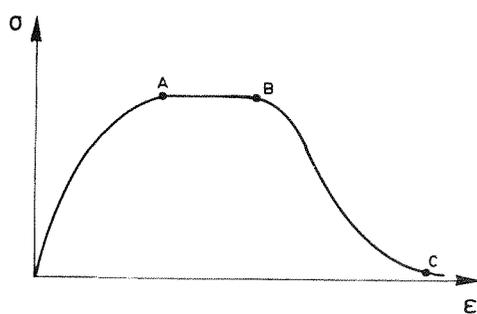
La pertenencia de un determinado punto del medio continuo a una línea singular (de normal  $\mathbf{n}$  en dicho punto) viene determinada por lo que se denomina "condición de localización" cuya expresión matemática es <sup>2,28</sup>:



a) Material elasto-plástico genérico



b) Material frágil



c) Material dúctil

Figura 2. Diagramas esquemáticos tensión - deformación

$$\det[\mathbf{Q}(\mathbf{n})] = \det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (3)$$

donde  $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$  es un tensor de segundo orden, denominado *tensor acústico*<sup>2,28</sup>, y  $\mathbf{C}$  el tensor constitutivo tangente de cuarto orden que interviene en la ecuación constitutiva incremental:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (4)$$

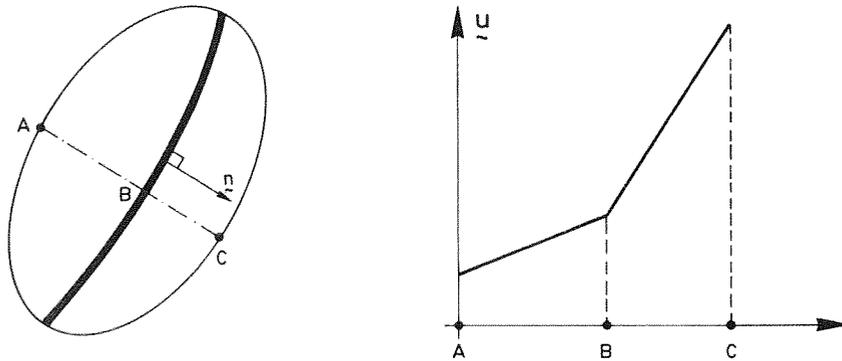


Figura 3. Línea singular

Denominaremos "banda singular" a una banda de espesor infinitesimal delimitada por dos líneas singulares  $\Gamma^-$  y  $\Gamma^+$  (ver Figura 4a).

La consideración de una banda singular para modelar una fisura permite definir el vector de desplazamientos relativos de los labios de la misma,  $\omega$ , como el límite de la diferencia de los desplazamientos  $\mathbf{u}^+$  y  $\mathbf{u}^-$ , en las líneas singulares  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$ , cuando el espesor  $h$  de la banda tiende a cero (ver Figura 4b):

$$\omega = \lim_{h \rightarrow 0} (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \quad (5)$$

El desarrollo de líneas singulares en el sólido y el cumplimiento de la condición de localización (3) se realiza a través de procesos de bifurcación de la solución de las ecuaciones del problema tenso-deformacional<sup>17,20,28</sup>. En este sentido la elección de la adecuada ecuación constitutiva para el material juega un papel importante. Hay ciertas ecuaciones constitutivas que definen "materiales positivos"<sup>27</sup> que no permiten bifurcaciones a la solución del problema y que, por consiguiente, no producen localización en el sentido en que se ha definido más arriba. *La Teoría de la Plasticidad con ablandamiento, por el contrario, define materiales "no positivos" y, por lo tanto, permite utilizar la técnica de bandas singulares para simular una fisura.*

#### 4. OBJETIVIDAD

La modelización de una banda singular en el sólido discretizado puede hacerse a través de los contornos de una banda de elementos finitos (ver Figura 4c) en el interior de los cuales se cumple la condición de localización (3). El hecho de que esta banda sea de espesor finito produce los problemas de falta de objetividad comentados anteriormente. Para establecer el problema, consideraremos el análisis bidimensional de un sólido de espesor unidad y una banda de elementos finitos (ver Figura 4c) modelando una fisura entre los puntos A y B.

Consideremos el proceso de deformación que conduce a la fractura, y la trayectoria tensión-deformación que se produce en un punto (ver Figura 4d). Sea  $g_f$  la energía específica (por unidad de área) disipada durante todo el proceso de deformación:

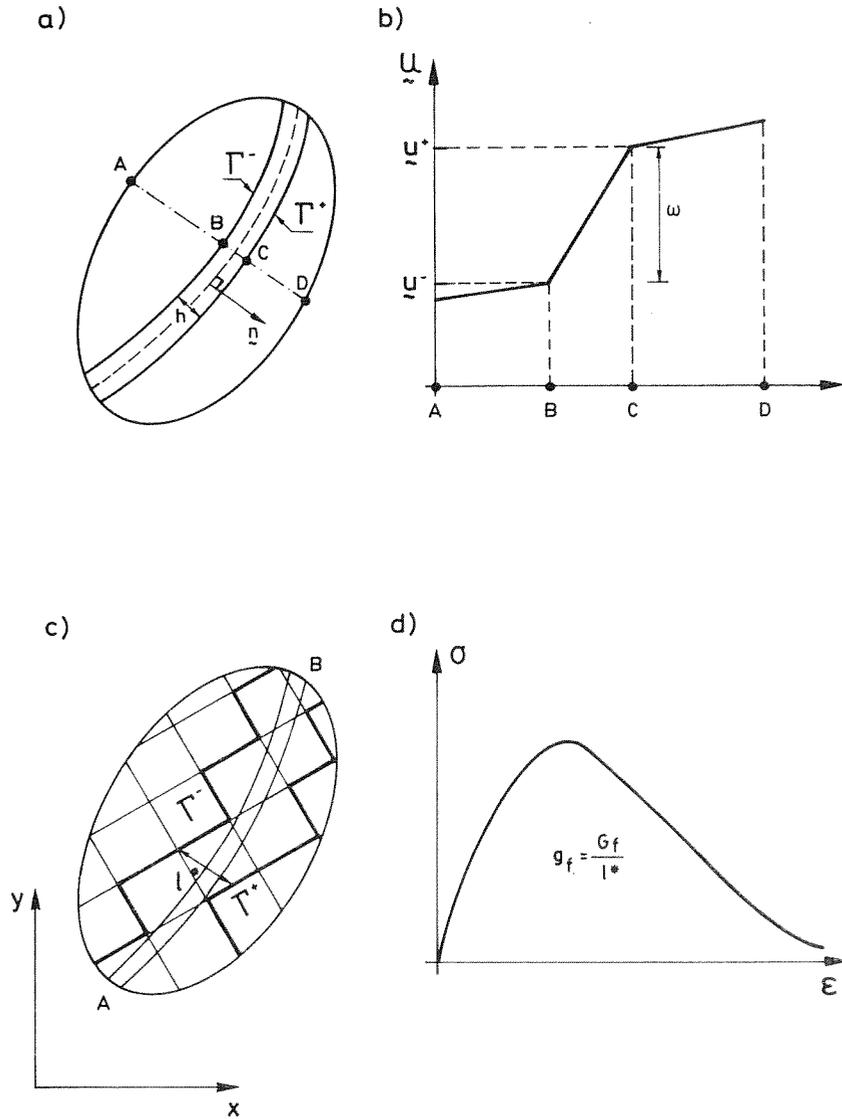


Figura 4. a) Banda singular,  
 b) Variación de los desplazamientos en la banda singular,  
 c) Banda singular en el sólido discretizado,  
 d) Trayectoria tensión - deformación de un punto de la banda singular

$$g_f = \int_0^{\infty} \sigma_{ij}(t) \dot{\epsilon}_{ij}(t) dt \quad (6)$$

De acuerdo con esta definición, la energía disipada en toda la banda de elementos finitos (de área  $\Omega$ ) que modela la fisura, será:

$$W = \int_{\Omega} g_f d\Omega \quad (7)$$

Por otra parte, si admitimos que la Energía de Fractura  $G_f$  (energía disipada por unidad de longitud de fisura) es una propiedad del material, constante en todos los puntos <sup>2,3,23</sup>, la energía disipada al producirse el tramo de fisura entre los puntos  $A$  y  $B$  será:

$$\Omega = G_f \cdot l_{AB} \quad (8)$$

donde  $l_{AB}$  es la longitud del tramo considerado. Igualando la disipación de energía dada por las ecuaciones (7) y (8) se obtiene:

$$\int_{\Omega} g_f d\Omega = G_f \cdot l_{AB} \quad (9)$$

Si la energía específica  $g_f$  fuese una constante, el refinamiento de la malla conduciría a la reducción del dominio  $\Omega$  de la banda singular, y por tanto a la reducción de la integral del lado izquierdo de la ecuación (8), mientras que el lado derecho permanecería inalterable. Para evitar esta contradicción la energía específica debe depender del tamaño de la discretización. La forma usual de tener en cuenta esta situación es a través de lo que se denomina "longitud característica"  $l^*$ , que relaciona las energías específica  $g_f$  y de Fractura  $G_f$  de la forma:

$$g_f(x, y) = \frac{G_f}{l^*(x, y)} \quad (10)$$

Existen diversas propuestas para la longitud característica <sup>3,6,11,15,19,23</sup>, que debe ser, de alguna manera, una medida del ancho de la banda singular de elementos finitos en cada punto de la misma.

La introducción de una adecuada expresión de la longitud característica en la ecuación (10) conduce a una correcta disipación de energía en la banda y a la obtención de objetividad en los resultados.

## 5. FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD

La teoría de la Plasticidad está constituida por el conjunto de hipótesis y de ecuaciones que gobiernan el comportamiento tenso-deformacional de un material "ideal", el material "elastoplástico", que, a su vez, es una aproximación más o menos cercana al comportamiento de un amplio grupo de materiales utilizados en ingeniería. El núcleo de la teoría de la Plasticidad, para pequeñas deformaciones, se establece alrededor de los siguientes conceptos:

- Superficie de fluencia
- Ecuaciones de evolución de las variables internas
- Descomposición aditiva de la deformación
- Regla de flujo plástico
- Irreversibilidad del trabajo plástico

A continuación se describen brevemente , y de forma genérica, cada uno de estos conceptos que se particularizarán en el Apartado 6 en su aplicación a un modelo elastoplástico para materiales frccionales frágiles.

### 5.1. Superficie de fluencia

Se define una superficie de fluencia, en el espacio de tensiones, que evoluciona a lo largo del proceso de deformación a medida que lo hacen una serie de variables  $\mathbf{q}(t)$  denominadas "variables internas" (ver Figura 5a).

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (11)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  y  $\mathbf{q}(t)$  son los vectores que agrupan las componentes de tensión y las diversas variables internas, respectivamente.

Se dice que el estado tensional  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ , en un instante dado, es "elástico" si define, en el espacio de tensiones, un punto situado en el interior de la superficie de fluencia, es decir:

$$f(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)) < 0 \quad (12)$$

La evolución del estado tensional puede situar el punto representativo del estado tensional sobre la superficie de fluencia. Se dice entonces que el estado tensional es "plástico", cumpliéndose:

$$f(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)) = 0 \quad (13)$$

No se permite que durante el proceso de deformación se produzcan estados tensionales situados fuera de la superficie de fluencia. A partir de un estado tensional plástico en el que se cumple la ecuación (13) cualquier proceso que tienda a situarlo fuera de la superficie de fluencia va acompañado de una variación o movimiento de dicha superficie (ver Figura 5b), regulado por la evolución de las variables internas  $\mathbf{q}$ , que lo mantiene sobre la misma.

En consecuencia, podemos definir los "procesos de deformación elásticos" como aquellos que producen estados tensionales situados en el interior de la superficie de fluencia (y que por lo tanto no la modifican, ver Figura 6a). Un "proceso de deformación plástico", por el contrario, es aquel que partiendo de un estado tensional plástico (situado sobre la superficie de fluencia), tiende a salirse de la misma obligando a su modificación (ver Figura 6b). En consecuencia durante un proceso de deformación plástico se cumple

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 ; \quad f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} + d\mathbf{q}) = 0 \quad (14)$$

es decir:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (15)$$

La ecuación (15) es la denominada "ecuación de consistencia" que define matemáticamente un proceso de deformación plástico.

II - Fractura Elastoplástica

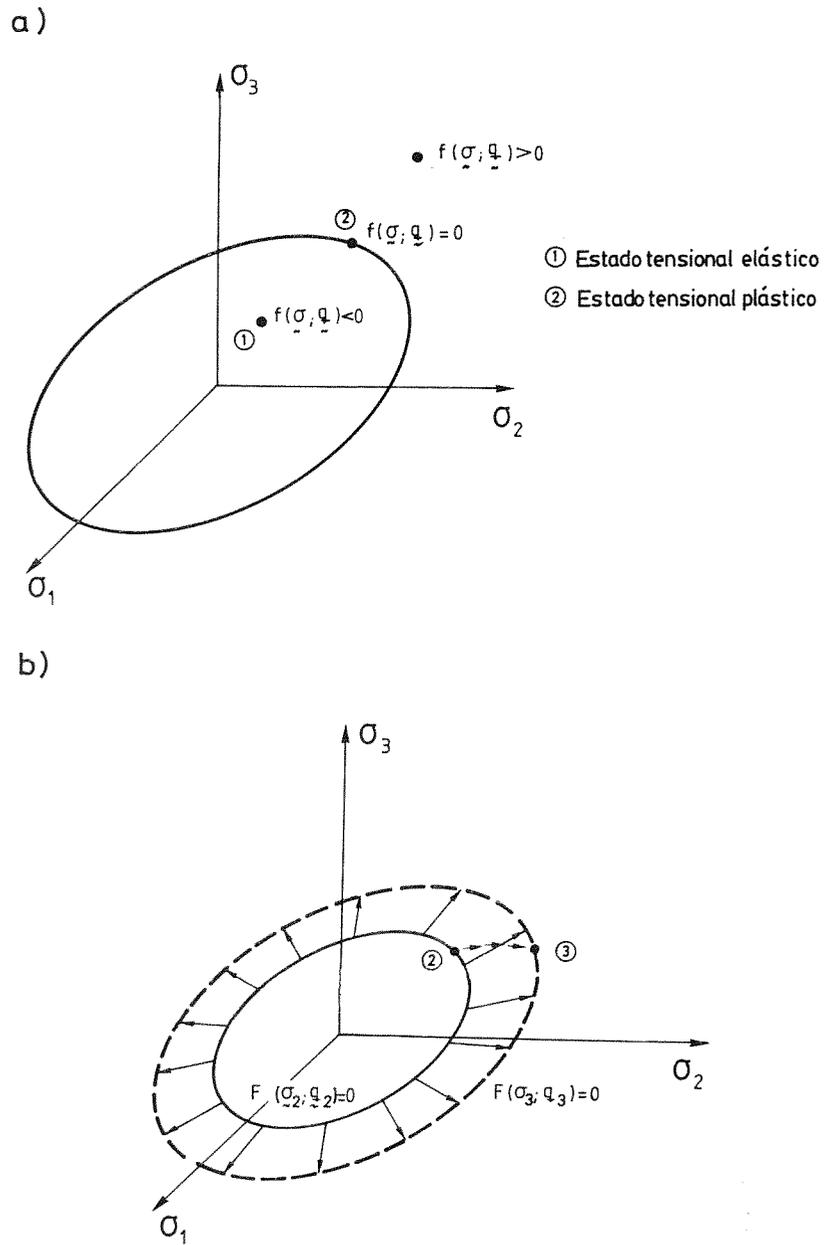


Figura 5. a) Superficie de fluencia,  
b) Movimiento isotrópico de la superficie de fluencia

En el caso más general, el proceso de deformación seguido en un punto del sólido será un proceso "elastoplástico" en el cual se sucederán a lo largo del tiempo procesos elásticos y procesos plásticos (ver Figura 6c).

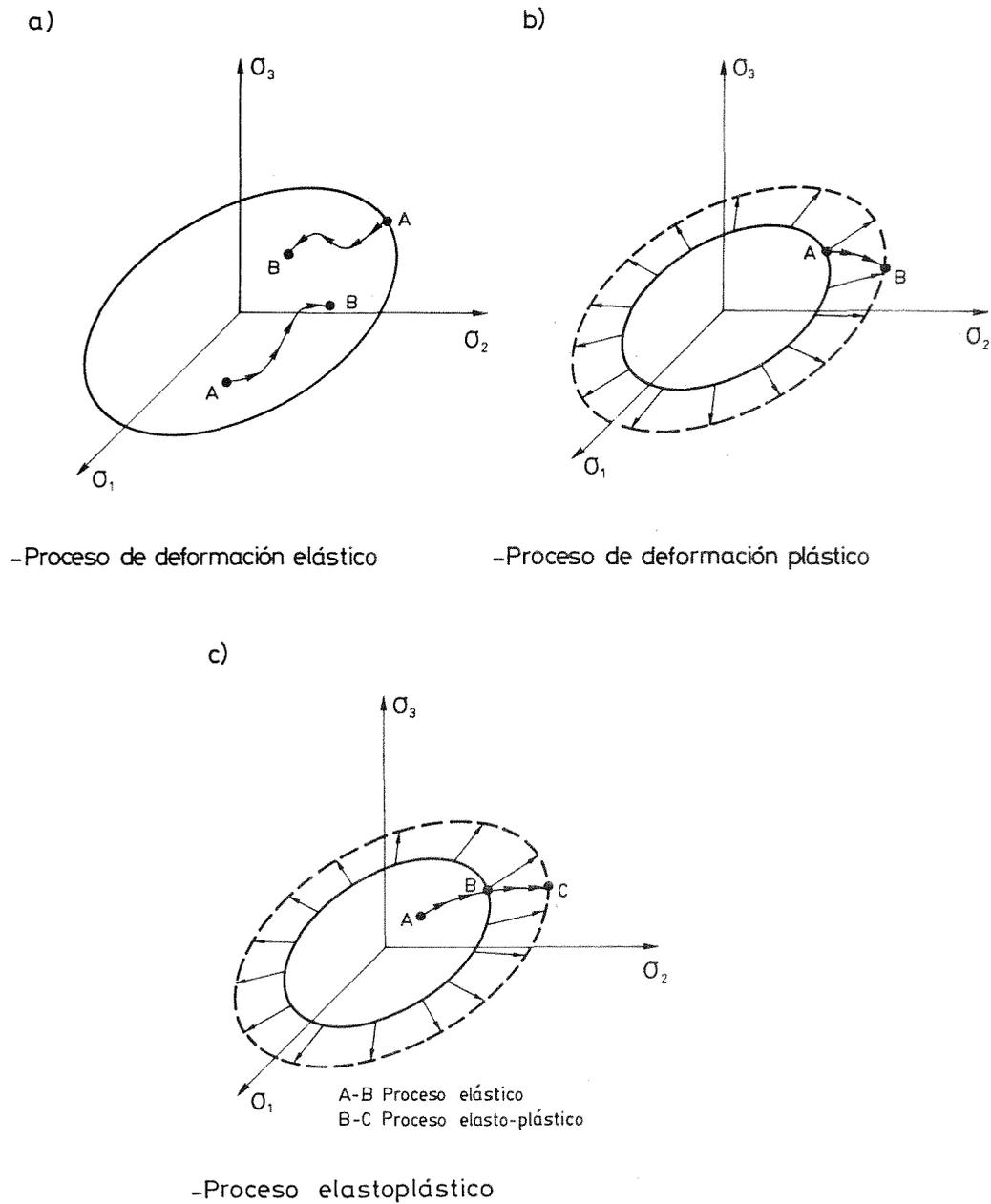


Figura 6. Superficie de fluencia y su evolución

## 5.2. Ecuaciones de evolución

Las variables internas varían o "evolucionan" a lo largo del proceso de deformación. Las ecuaciones de evolución proporcionan información sobre la velocidad de esta variación en función del estado tensional y del propio valor de las variables internas:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (16)$$

Consideremos un punto del sólido y un instante  $t$ , en el que los valores de las variables internas y de las tensiones son tales que el estado tensional  $\boldsymbol{\sigma}$  es plástico ( $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ ). Se dice que el proceso de deformación presenta "endurecimiento" o "ablandamiento" en dicho instante si una variación infinitesimal de las variables internas  $\mathbf{q}$  (manteniendo constantes las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ ) tiende a dejar el estado tensional dentro de la superficie de fluencia (endurecimiento) o fuera de la misma (ablandamiento), respectivamente; es decir (ver Figura 7):

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} + d\mathbf{q}) < 0 \rightarrow \text{endurecimiento} \quad (17.a)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} + d\mathbf{q}) > 0 \rightarrow \text{ablandamiento} \quad (17.b)$$

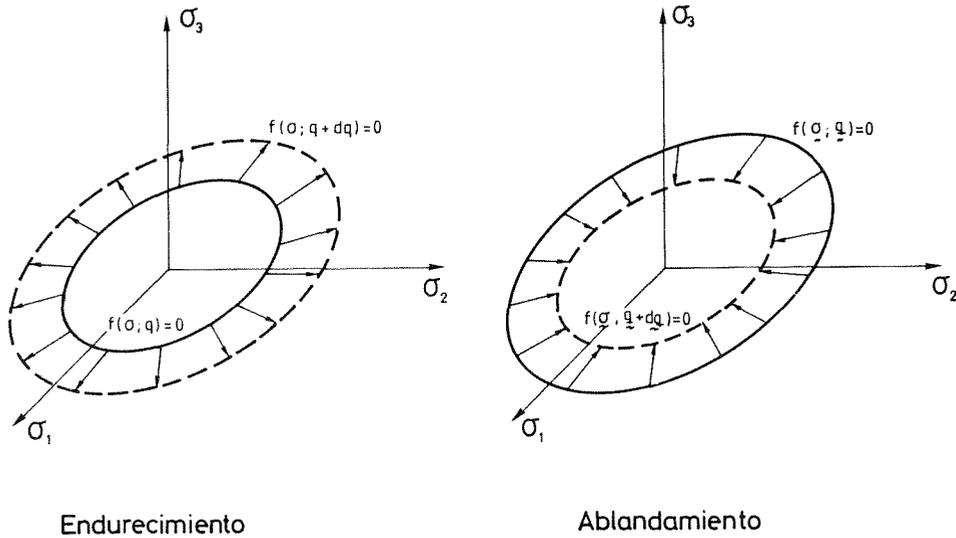


Figura 7. Movilidad de la superficie de fluencia

Teniendo en cuenta la ec. (16):

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} + d\mathbf{q}) - f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} dt = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} dt \quad (18)$$

Definiendo la "función de endurecimiento" como:

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} \quad \text{con} \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (19)$$

el endurecimiento y ablandamiento para un estado tensional plástico queda definido por:

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) > 0 \rightarrow \text{endurecimiento} \quad (20)$$

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0 \rightarrow \text{ablandamiento} \quad (21)$$

El endurecimiento hace evolucionar la superficie de fluencia durante el proceso plástico hacia el "exterior". Por el contrario, el ablandamiento produce una evolución de la misma hacia el "interior". En el caso intermedio (endurecimiento o ablandamiento nulo), la función de endurecimiento (19) es nula y se mantiene inalterable la superficie de fluencia. Estas definiciones del endurecimiento y el ablandamiento son consistentes con las dadas en las ecs. (1) y (2).

Como puede observarse de las ecuaciones (19) a (21), elegida una superficie de fluencia (determinada por la forma matemática de la ecuación (13)), la existencia de endurecimiento o ablandamiento en un cierto instante depende de la adecuada elección de las ecuaciones de evolución (16).

### 5.3. Descomposición aditiva de la deformación

Se establece que la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  puede descomponerse de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (22)$$

o, en forma incremental:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (23)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  es el vector de deformación elástica y  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  el vector de deformación plástica.

Los componentes del vector de deformación plástica  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  se consideran incluidas dentro del conjunto  $\mathbf{q}$  de variables internas y, por lo tanto, es necesario considerar ecuaciones de evolución del tipo (16) para las mismas. En este caso, sin embargo, estas ecuaciones son de un tipo particular y vienen determinadas por la regla de flujo del apartado 5.4.

La deformación plástica es nula en el estado indeformado ( $t = 0$ ) y no varía durante los procesos de deformación elásticos, es decir:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0 \quad \text{para} \quad f < 0 \quad (24)$$

y de acuerdo con la ec. (22):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad \text{para} \quad f < 0 \quad (25)$$

En consecuencia en procesos de deformación elásticos sólo se producen deformaciones elásticas y la ecuación constitutiva incremental es la propia de un material elástico:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{D}^e \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (26)$$

donde  $\mathbf{D}^e$  es el tensor constitutivo tangente elástico de segundo orden, tal como se formula en la teoría de la elasticidad lineal o no lineal<sup>29</sup>. Por el contrario, en los procesos de deformación plásticos definidos por la ecuación (15), hay producción de deformación elástica y plástica. La obtención de la ecuación constitutiva equivalente a la (26) en los casos elastoplásticos es

un objetivo fundamental de la Teoría de la Plasticidad que será abordado en el apartado 5.5.

#### 5.4. Regla de flujo plástico

La regla de flujo proporciona las ecuaciones de evolución de las componentes del vector de deformación plástica. A pesar de que estas componentes constituyen una parte del conjunto total de variables internas, sus ecuaciones de evolución merecen un tratamiento diferenciado puesto que la Teoría de la Plasticidad postula en todos los casos una misma expresión formal para ellas. Se establece una función, denominada "función potencial"  $g(\sigma, q)$ , a partir de la cual se determina la velocidad de crecimiento de las deformaciones plásticas, o ecuaciones de evolución de las mismas como:

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} (\sigma, q) \quad (27)$$

$$\dot{\lambda}(\sigma, q) > 0 \quad (28)$$

Las ecuaciones (27) y (28) ponen de manifiesto que  $\dot{\epsilon}^P$  tiene la dirección de la normal "hacia afuera" a la superficie potencial que pasa por el punto correspondiente en el espacio de tensiones (ver Figura 8) y de ahí que a la ecuación (27) se la denomine "criterio de normalidad"

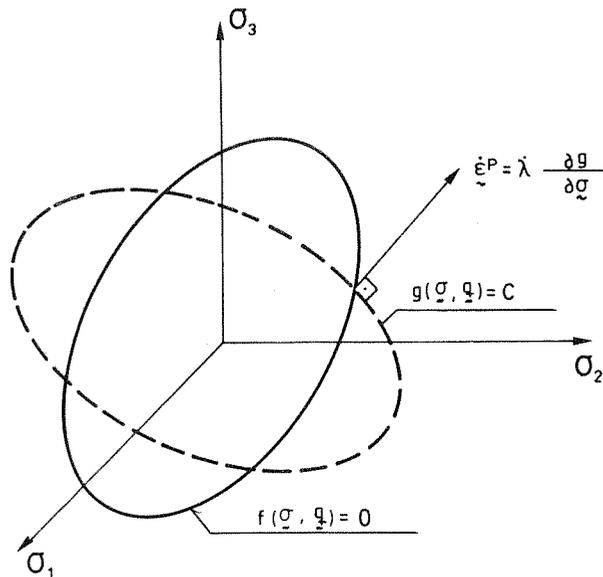


Figura 8. Superficie de fluencia y superficie de potencial plástico

Cuando las funciones de fluencia,  $f$ , y potencial,  $g$ , coinciden ( $f \equiv g$ ) se habla de plasticidad "asociada". El caso general  $f \neq g$  corresponde a plasticidad "no asociada" y permite simular ciertos fenómenos como la dilatancia, observados en los geomateriales <sup>29</sup>.

### 5.5. Ecuación constitutiva en régimen de deformación plástico

La ec. (26) es la ecuación constitutiva en régimen de deformación elástico. En régimen de deformación plástico la deformación se produce manteniéndose el estado tensional dentro de la superficie de fluencia, es decir, cumpliéndose la ecuación de consistencia (15). Dicha ecuación, junto con las ecuaciones (22), (26) y (27) permite obtener la ecuación constitutiva en régimen plástico como <sup>15,29</sup>:

$$\dot{\sigma} = D^{ep} \cdot \dot{\epsilon} \quad \text{para} \quad f(\sigma, q) = 0 \quad (29)$$

donde  $D^{ep}$  es el tensor constitutivo "elastoplástico" tangente de segundo orden definido por:

$$D^{ep} = D^e - \frac{\left( D^e \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \otimes \left( D^e \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)}{A + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot D^e \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (30)$$

El parámetro  $A$  de la ecuación (27) se obtiene de la expresión:

$$A(\sigma, q) = \frac{1}{\lambda(\sigma, q)} \cdot H(\sigma, q) \quad (31)$$

con lo que, teniendo en cuenta la ecuación (28), tiene el mismo signo que la función de endurecimiento  $H$  por lo que se utiliza frecuentemente como una alternativa para definir el endurecimiento o ablandamiento:

$$A(\sigma, q) > 0 \quad \rightarrow \quad \text{endurecimiento} \quad (32)$$

$$A(\sigma, q) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{ablandamiento} \quad (33)$$

Obsérvese que las ecuaciones (26) y (30) proporcionan una ecuación constitutiva tangente en los regímenes elástico y plástico. La correspondiente rigidez tangente  $D^{ep}$ , queda perfectamente definida conocida la rigidez tangente elástica  $D^e$ , las funciones de fluencia  $f$  y potencial  $g$ , y el parámetro  $A$  de la ecuación (31). La ecuación constitutiva permite, a través de procesos "standard" de integración en el tiempo, resolver el problema tenso-deformacional para el material elastoplástico "ideal" definido en la Teoría de la Plasticidad.

### 5.6. Irreversibilidad del trabajo plástico

Se postula que el trabajo plástico disipado durante el proceso de deformación es siempre positivo:

$$\dot{W}_p = \sigma \cdot \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad (34)$$

Consecuencia de la ecuación (34) es la irreversibilidad, desde el punto de vista termodinámico, de los procesos de deformación plásticos así como la irrecuperabilidad de las deformaciones plásticas <sup>29</sup>.

## 6. PARTICULARIZACION A UN MODELO PARA MATERIALES FRAGILES COHESIVOS

Como ejemplo de la utilización de la Teoría de la Plasticidad para la simulación de procesos de fractura se presenta a continuación un modelo desarrollado en <sup>15</sup> para geomateriales de tipo frágil (hormigón, rocas, etc.).

El modelo presta atención no sólo al comportamiento a tracción sino que también, debido a la interacción entre el comportamiento en los diversos puntos del sólido, intenta modelar de forma correcta el comportamiento a compresión del material. En los siguientes apartados se presentan las características fundamentales de dicho modelo intentando encuadrarlo dentro del esquema y nomenclatura utilizada en la descripción de la Teoría de la Plasticidad del apartado 5.

### 6.1. Variables internas

El vector de variables internas tiene las siguientes componentes:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} C \\ \kappa^p \\ \epsilon^p \end{Bmatrix} \quad (35)$$

donde  $C$  tiene el significado de "cohesión" y  $\kappa^p$  es una variable de "daño plástico" que intenta cuantificar el daño sufrido en cada punto asignándole un valor entre 0 y 1. El valor 0 indica que no hay daño y el valor 1 indica fractura total.

### 6.2. Superficies de fluencia y potencial plástico.

Previamente a la descripción de dichas superficies, hay que introducir diversos parámetros, típicos del comportamiento de materiales friccionales, como son la cohesión  $C$ , el ángulo de rozamiento interno  $\phi$ , y la dilatación  $\psi$ .

La cohesión es una medida de la capacidad de resistencia de las partículas a su separación. Al ser una variable interna no viene descrita en forma explícita, sino mediante

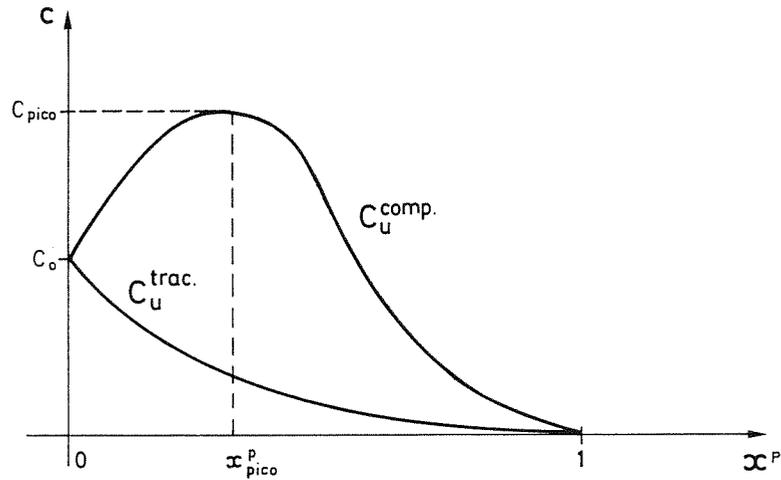


Figura 9. Curvas de cohesión para procesos de compresión y tracción uniaxial

una ecuación de evolución del tipo (16). Dicha ecuación se presentará en el apartado 6.3 pero previamente se necesita definir dos curvas empíricas que coinciden con la evolución de la cohesión (o tensión uniaxial) que se observaría en un ensayo uniaxial a tracción,  $C_u^t$ , y a compresión,  $C_u^c$ . La forma de estas curvas en función del parámetro de daño  $\kappa^p$  viene dada en la Figura 9 y los valores necesarios para acotarlas se determinan a partir de resultados experimentales.

El ángulo de rozamiento interno, como su nombre indica, es una medida de la resistencia al deslizamiento tangencial entre partículas. Es posible describirlo a través de una ecuación de evolución aunque, para materiales friccionales como el hormigón, la experimentación demuestra que se puede trabajar con una fórmula explícita en función del parámetro de daño  $\kappa^p$ . En la Figura 10 se presenta una posible curva de variación del ángulo de rozamiento interno  $\phi$  con el parámetro de daño. Esta variación es creciente hasta un cierto valor  $\kappa_1^p$  donde se estabiliza. También en este caso los valores de  $\kappa_1^p$  y  $\phi_{max}$  deben determinarse a partir del ajuste con resultados experimentales.

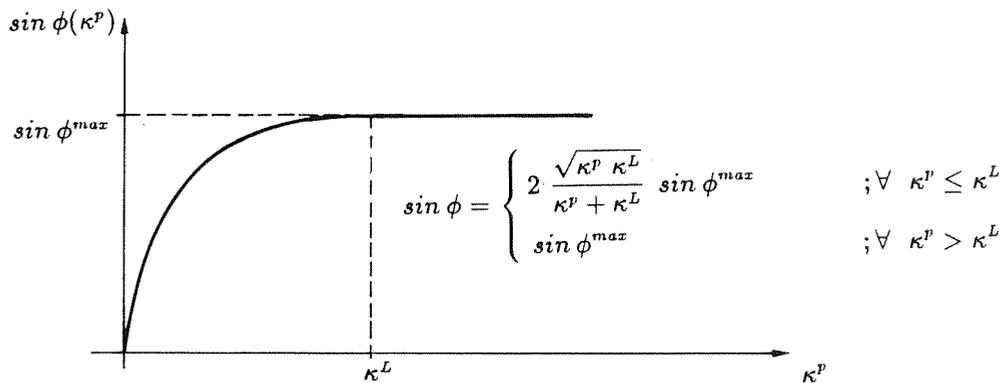


Figura 10. Curva Ángulo de rozamiento interno – Variable de daño plástico

## II - Fractura Elastoplástica

Finalmente, la dilatancia es el fenómeno de cambio de volumen en el sólido durante un proceso inelástico en el que predominan las deformaciones de corte. En cierta forma, puede atribuirse al crecimiento de la microfisuración y su magnitud se evalúa a través del ángulo de dilatancia  $\psi$ . También en este caso su evolución podría darse mediante una ecuación de evolución y  $\psi$  sería entonces una variable interna. Sin embargo, resulta suficientemente aproximado, vistos los resultados experimentales, describir la dilatancia a través de su relación con el ángulo de fricción  $\phi(\kappa^p)$  que se presenta en la Figura 11. La correspondiente curva consta de dos tramos. Hasta un cierto valor  $\phi_{cv}$  (que se determina experimentalmente) se considera dilatancia nula; a partir de dicho valor, hasta el valor máximo  $\phi_{max}$ , se considera la relación trascendente que se da en la Figura 11. El parámetro  $\phi_{cv}$  adquiere, en consecuencia, el significado de ángulo de rozamiento máximo a volumen constante (sin dilatancia).

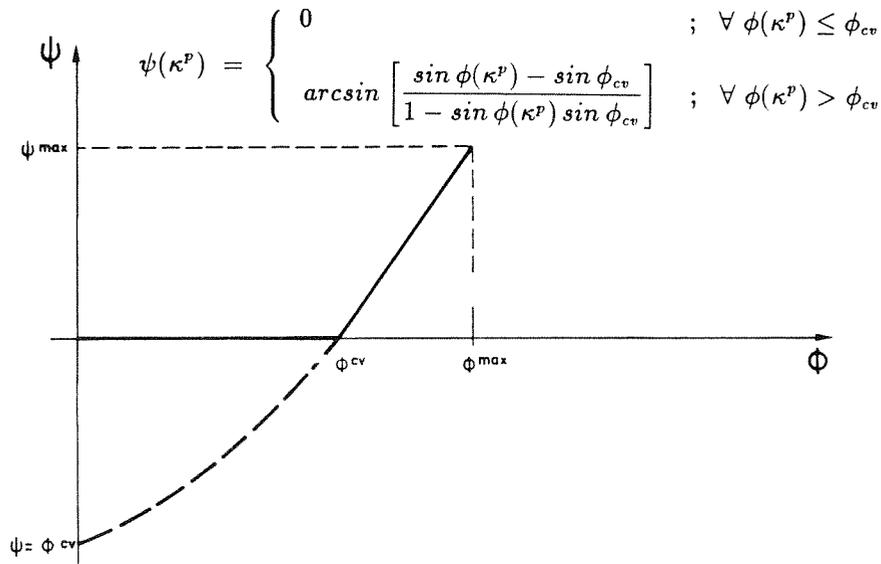


Figura 11. Curva Ángulo de dilatancia – Ángulo de rozamiento interno

Las curvas de las Figuras 9, 10 y 11 deben determinarse a partir de datos experimentales. A partir de ellas es posible establecer la superficie de fluencia, la función potencial y las ecuaciones de evolución en forma coherente con la Teoría de la Plasticidad. La superficie de fluencia se define mediante la ecuación:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = F(\boldsymbol{\sigma}) - C(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (36)$$

donde  $C$  es la cohesión en su acepción más general (que sólo en el caso de deformación uniaxial coincidirá con los valores dados por las curvas de la Figura 9) y  $F$  viene dada por:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{1-\alpha} [\sqrt{3} J_2 + \alpha I_1 + \beta \langle \sigma_{max} \rangle - \gamma \langle -\sigma_{max} \rangle] \quad (37)$$

donde  $\langle \pm x \rangle$  es la función de Mc. Auley:

$$\langle \pm x \rangle = \frac{1}{2} (x \pm |x|) \quad (38)$$

$I_1(\boldsymbol{\sigma})$  es el primer invariante del tensor de tensiones ( $I_1 = \sigma_{ii}$ ),  $J_2$  es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones ( $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}$ ;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{ij}$ ) y  $\sigma_{max}$  la mayor de las tensiones principales. Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son adimensionales y se determinan como sigue:

- $\alpha$  se obtiene a partir de ensayos de compresión biaxial simétrico y de compresión uniaxial. Si  $f_b$  es la máxima resistencia del material, en un ensayo de compresión biaxial simétrico, y  $f_c$  es su resistencia máxima a compresión en un ensayo uniaxial entonces:

$$\alpha = \frac{(f_b/f_c) - 1}{2(f_b/f_c) - 1} \quad (39)$$

- $\beta$  se obtiene a partir de las tensiones máximas a compresión  $f_c$  y a tracción  $f_t$  en un ensayo uniaxial

$$\beta = (1-\alpha) \frac{f_c}{f_t} - (1+\alpha) \quad (40)$$

- $\gamma$  se define a partir del radio octaédrico máximo  $\rho$ :

$$\gamma = \frac{3(1-\rho)}{2\rho-1} \quad (41)$$

En el caso particular de hormigones, los resultados experimentales demuestran que los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  varían dentro de límites muy estrictos

$$0.08 < \gamma < 0.12$$

$$\beta \simeq 7.50 \quad (42)$$

$$\gamma \simeq 3.50$$

por lo que pueden sustituirse dichos valores directamente en la ecuación (37).

La forma de la superficie de fluencia definida por la ecuación (37), en el espacio de tensiones principales, se presenta en la Figura 12. Como puede verse, en la zona de compresión biaxial ( $0 = \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) donde el parámetro  $\gamma$  de la ecuación (38) no interviene, ( $\langle -\sigma_{max} \rangle = 0$ ) dicha superficie se asemeja a la conocida superficie de Drucker-Prager<sup>15</sup>.

La función potencial se establece como:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = G(\boldsymbol{\sigma}, \psi(\kappa^p)) = \frac{I_1}{3} \text{sen}\psi + \sqrt{J_2} \left( \text{ccs}\theta - \frac{\text{sen}\theta \text{sen}\psi}{\sqrt{3}} \right) \quad (43)$$

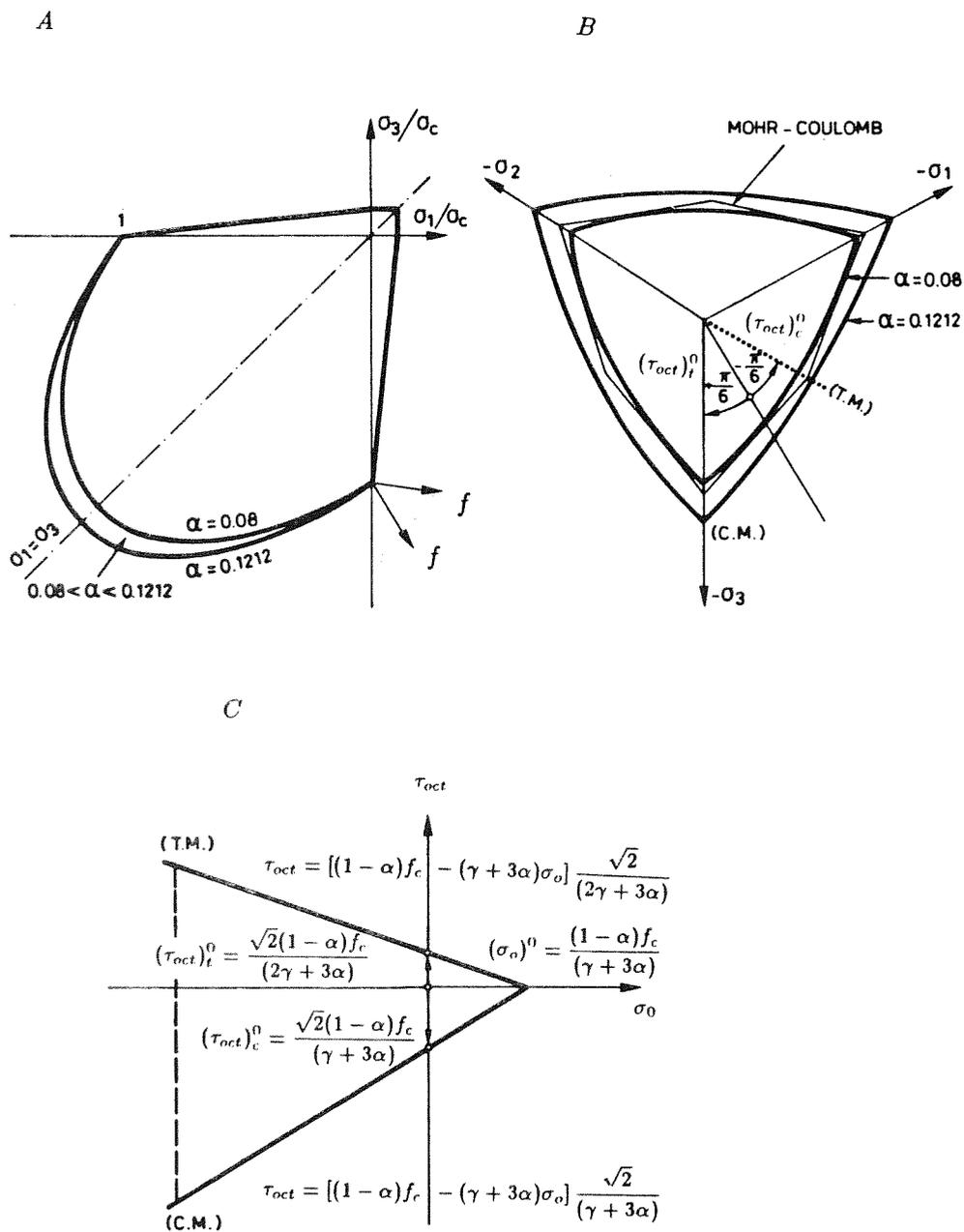


Figura 12. Superficie de fluencia plástica:  
 A) plano  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  
 B) plano octaédrico,  
 C) planos meridianos de tracción-compresión

donde  $\theta$  es el ángulo de similitud definido por:

$$\text{sen}(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \quad (44)$$

siendo  $J_3$  el tercer invariante del tensor desviador de tensiones ( $J_3 = \det(s_{ij})$ ).

### 6.3. Ecuaciones de evolución

Las ecuaciones de evolución de las variables internas "deformación plástica" vienen determinadas por la regla de flujo de la ec.(27) y por lo tanto quedan establecidas al definir la función potencial  $g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$  de la ec.(43).

La ecuación de evolución para la "variable de daño"  $\kappa^p$  se determina de la siguiente forma:

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{g_t^*} \langle \sigma_i \rangle + \frac{1}{g_c^*} \langle -\sigma_i \rangle \right\} \dot{\varepsilon}_i^p ; \quad 0 < \kappa^p < 1 \quad (45)$$

donde  $\sigma_i$  y  $\varepsilon_i^p$  son las tensiones y deformaciones plásticas principales, respectivamente, y  $g_t^*$  y  $g_c^*$  se obtienen como

$$g_t^* = g_t \cdot \frac{\sum_1^3 \langle \sigma_i \rangle}{C_u^t(\kappa^p)}$$

$$g_c^* = g_c \cdot \frac{\sum_1^3 \langle -\sigma_i \rangle}{C_u^c(\kappa^p)} \quad (46)$$

siendo  $g_t^*$  y  $g_c^*$  las áreas encerradas debajo de las curvas de cohesión uniaxial a tracción y compresión respectivamente (ver Figura 13).

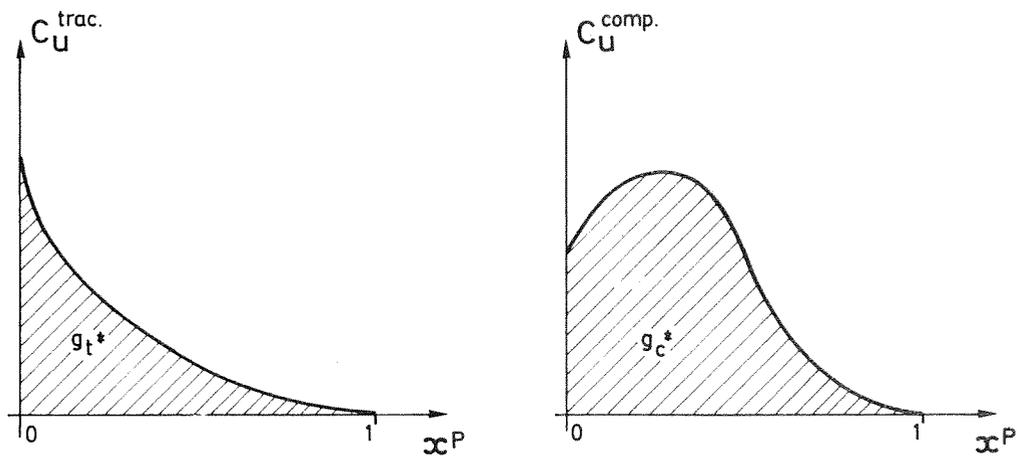


Figura 13. Curvas uniaxiales de cohesión - daño plástico

Las magnitudes  $g_t$  y  $g_c$  tienen el sentido físico de energías específicas (energías disipadas por unidad de volumen) a tracción y compresión, respectivamente. Para conseguir objetividad en los resultados, estas energías específicas deben provenir de unas energías por unidad de superficie  $G_t$  y  $G_c$  de tal forma que:

$$g_t = \frac{G_t}{l^*} \quad (47)$$

$$g_c = \frac{G_c}{l^*} \quad (48)$$

donde  $l^*$  es la longitud característica de la ecuación (10). El valor de  $G_t$  corresponde a la Energía de Fractura (asociada a la tracción) y  $G_c$  a la energía de aplastamiento (asociada a la compresión); ambas consideradas como propiedades del material.

Finalmente, para la variable interna "cohesión" se considera la siguiente ecuación de evolución:

$$\dot{C} = C \left[ \frac{r(\sigma)}{C_u^t(\kappa^p)} \cdot \frac{dC_u^t}{d\kappa^p} + \frac{1-r(\sigma)}{C_u^c(\kappa^p)} \cdot \frac{dC_u^c}{d\kappa^p} \right] \quad (49)$$

donde  $r(\sigma)$  es una función que caracteriza el estado tensional en el instante considerado (tracción, compresión o tracción-compresión) y se obtiene como:

$$r(\sigma) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (50)$$

De la ecuación (50) se observa que para estados de tracción pura ( $\sigma_i > 0$ )  $r(\sigma) = 1$ , para estados de compresión pura ( $\sigma_i < 0$ )  $r(\sigma) = 0$  y en estados mixtos  $0 < r(\sigma) < 1$ .

#### 6.4. Líneas o superficies de fractura.

Tal y como se ha comentado en el apartado 3, desde el punto de vista de la localización una fisura está asociada a una línea o superficie singular. La pertenencia de un punto a dicha línea o superficie se establece a través del cumplimiento, en dicho punto, de la condición de localización (3) para una cierta normal  $\mathbf{n}$  que determina la dirección de la fisura. El tensor constitutivo  $\mathcal{C}$  que aparece en la ec. (3) se extrae de la matriz constitutiva tangente  $\mathbf{D}^{ep}$  de la ec. (30). Conocido el valor de  $\mathcal{C}$ , un algoritmo numérico puede encargarse de encontrar en qué dirección  $\mathbf{n}$  se cumple la condición de localización, y determinar las líneas o superficies de fisuración.

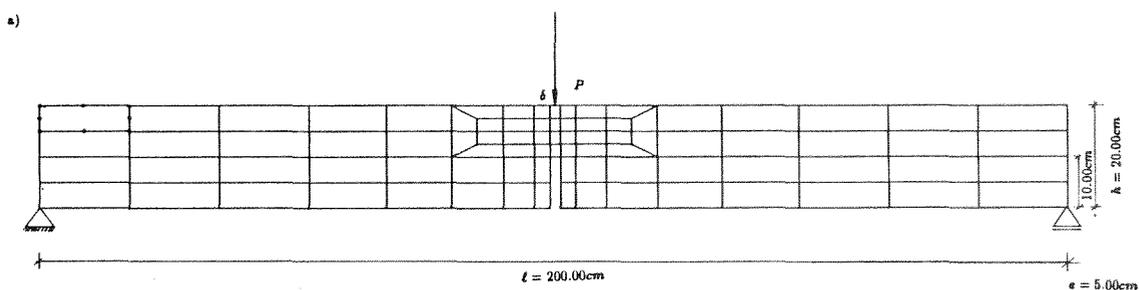
Sin embargo, los resultados experimentales en materiales friccionales demuestran que las superficies de fisuración son casi exactamente ortogonales a la dirección de la máxima deformación plástica de tracción<sup>8</sup>. Este criterio puede entonces ser considerado como una alternativa válida a la condición de localización para determinar las superficies de fractura. La determinación de dichas superficies es un proceso aparte del núcleo del modelo numérico, que puede realizarse como un postproceso en aquellas fases del cálculo en las que se desee observar la evolución de las fisuras<sup>15</sup>.

## 7. EJEMPLOS DE APLICACION

Se presentan a continuación algunos ejemplos de aplicación del modelo elastoplástico de fractura descrito. Dichos ejemplos corresponden a ensayos numéricos sobre probetas de hormigón en las que predominan los modos de fractura I y II. Los correspondientes resultados experimentales se comparan con los numéricos con el fin de contrastar la capacidad del modelo para reproducirlos.

### 7.1. Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada. (Modo de fractura I)

El ejemplo corresponde al ensayo de una viga, con una entalla en el centro de la luz, simplemente apoyada en los extremos, sobre la que se impone un desplazamiento creciente en el punto medio de la cara superior. La viga es de sección rectangular y sus características geométricas, la malla de elementos finitos (isoparamétricos de ocho nodos) y las propiedades del material consideradas se presentan en la Figura 14. La integración numérica es del tipo Gauss-Legendre,<sup>30</sup> con un orden de integración  $2 \times 2$ .



b)

$$E_0 = 305810.40 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\nu_0 = 0.20$$

$$\phi_0 = \text{cte.} = 32^\circ$$

$$\psi_0 = \text{cte.} = 32^\circ$$

$$\bar{\sigma}_e^{\text{max}} = 339.45 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_e^{\text{ash}} = 360.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_t^{\text{max}} = 36.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_f = 0.126 \text{ kg/cm}$$

$$G_c = 12.600 \text{ kg/cm}$$

Plasticidad asociada

Sin degradación de rigidez

Figura 14. Ensayo a flexión de una viga entallada de hormigón simple.  
Geometría y parámetros del material

En la referencia <sup>23</sup> se describen los ensayos realizados con una serie de probetas de estas características. Los correspondientes resultados, en lo que se refiere a la curva carga-desplazamiento vertical en el centro de la luz, se presentan en la Figura 15. Puede observarse la dispersión de dichos resultados sobre una banda, una vez sobrepasado el máximo de la curva. Dicha circunstancia debe atribuirse a la dificultad de realizar ensayos precisos en la zona de ablandamiento, donde la rigidez de la máquina de ensayo puede afectar sensiblemente

## II - Fractura Elastoplástica

a los resultados produciendo tales dispersiones. En la Figura 15 se presentan también los resultados obtenidos con el modelo numérico donde puede observarse su buen ajuste al límite inferior de la banda experimental.

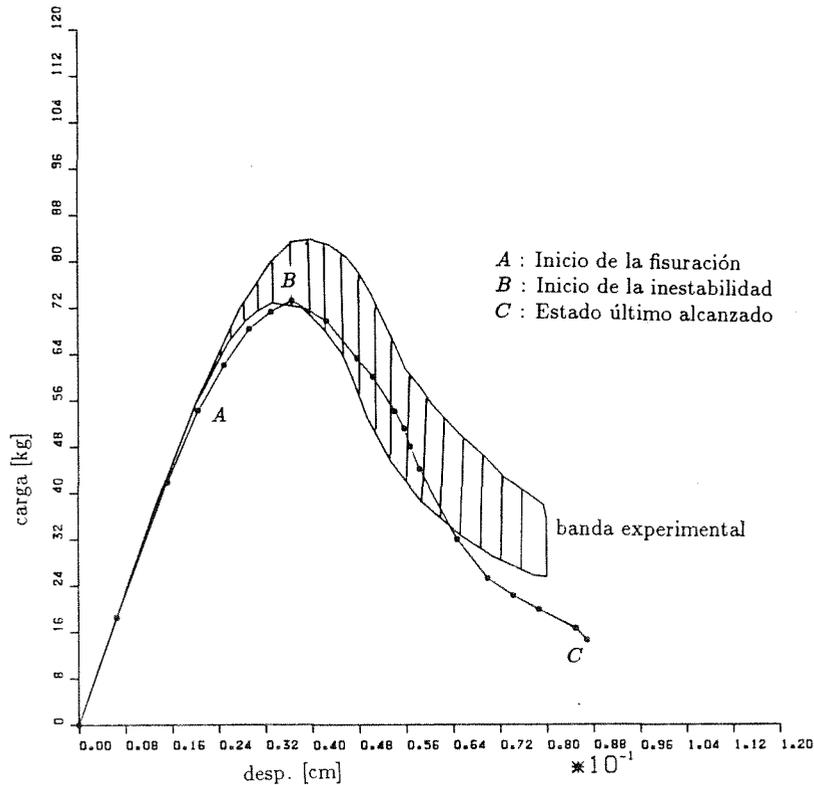


Figura 15. Ensayo a flexión de una viga entallada de hormigón simple:  
Carga aplicada - desplazamiento vertical del punto de aplicación.  
Comparación con estudios experimentales de Petersson

En la Figura 16 puede verse una ampliación de la zona de la entalla en el estado último analizado (punto C de la Figura 15). Se observa la localización de las deformaciones en una banda de elementos situados en el fondo de la entalla que modelizan la progresiva penetración de la fisura hacia la cara superior de la viga.

En la Figura 17.a se presenta el estado de fisuración detectado en los puntos de integración de los elementos de la banda de localización para un estado de deformación correspondiente al punto B de la Figura 15. En la Figura 17.b se presenta la fisuración en el estado de deformación última correspondiente al punto C de la Figura 15. El análisis de dicha fisuración se ha establecido de acuerdo con el esquema indicado en el apartado 6.4. La dirección de cada fisura se representa mediante un trazo orthogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva. Cada trazo se regresa según el valor de dicha deformación plástica principal lo cual constituye un indicador de la "apertura"

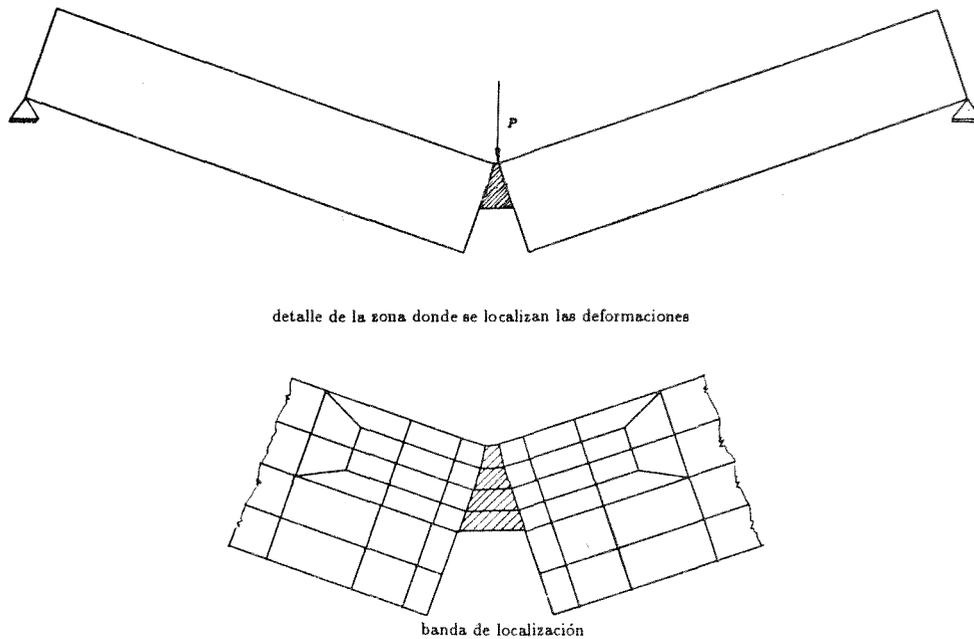


Figura 16. Ensayo a flexión de una viga de hormigón simple: Localización de deformaciones en el estado último

de la fisura. Aunque en el inicio de la fisuración en cada punto de integración se detecta doble fisuración (dos direcciones ortogonales, Figura 17.a) se observa que el avance de ésta se produce esencialmente en la dirección vertical y que, a medida que se produce la localización, la apertura de la fisura se concentra también en dicha dirección vertical (Figura 17.b). Este resultado concuerda con el modo de fractura I que corresponde a este ensayo.

En las Figuras 18.a, 18.b y 18.c, se representan las tensiones principales, mediante trazos orientados según las correspondientes direcciones principales y de longitud proporcional al valor de cada tensión principal. La representación se efectúa para los tres estados de deformación A,B y C indicados en la curva de la Figura 15. Se observa la progresiva relajación de dichas tensiones a medida que la fisura progresa y se localiza. En particular, en la Figura 18.c (correspondiente al estado último de deformación) puede observarse una importante concentración de tensiones de compresión en la cara superior de la viga. Estas tensiones producen importantes deformaciones plásticas de compresión en dicha zona, con el correspondiente aplastamiento y disipación de la energía. Una correcta modelización del comportamiento a compresión del material en estas condiciones incide muy directamente en los resultados obtenidos y en la correcta simulación del proceso de fractura.

### 7.2. Ensayo a flexión y corte de una viga entallada. Modo mixto de fractura (Modos I y II)

Se trata de una viga de hormigón en masa, cuyas características geométricas y propiedades mecánicas se reflejan en la Figura 19. Sobre la viga se considera una entalla que

## II - Fractura Elastoplástica

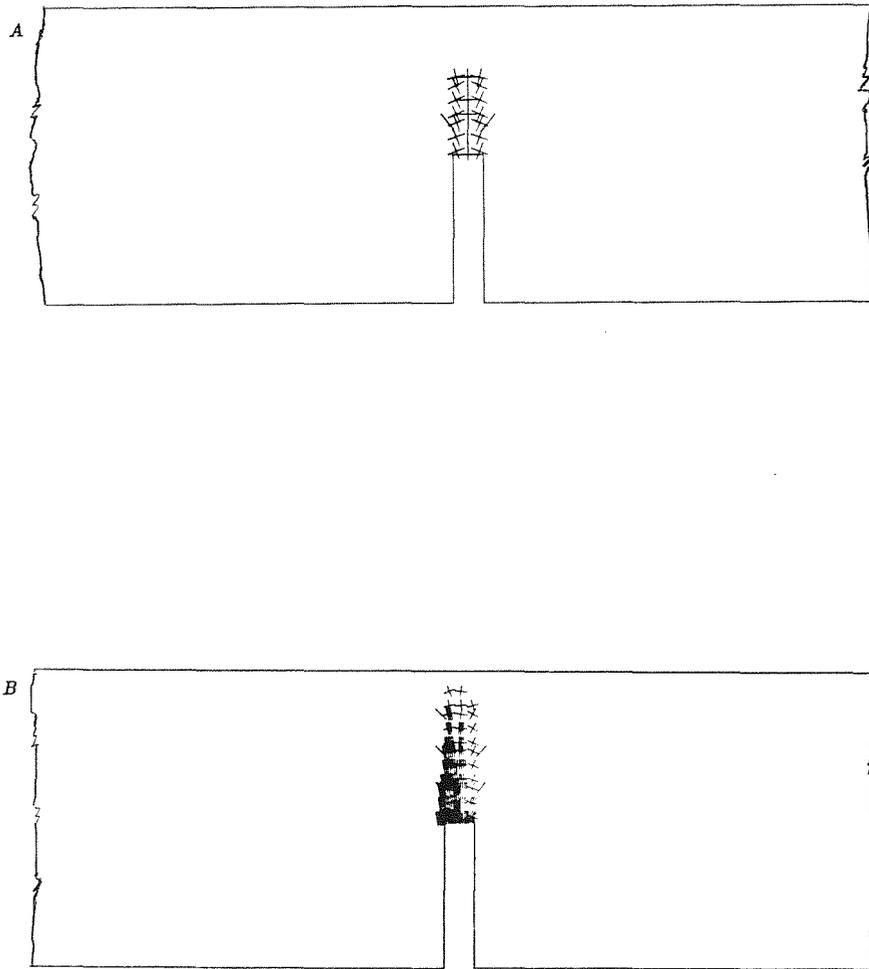


Figura 17. Ensayo a flexión de una viga entallada de hormigón simple. Estado de fisuración de la viga:  
A) En el pico de tensiones.  
B) En el estado último

profundiza, aproximadamente, sobre un tercio del canto. El ensayo fue realizado por Arrea e Ingrassia <sup>1</sup> con el fin de inducir, a partir de la entalla, un modo mixto de fractura con apertura (modo I) y deslizamiento (modo II) de los labios de la fisura. Para ello se diseñó el sistema de cargas de la Figura 19.a en el que se aplica una carga  $P$  sobre una viga de acero que apoya sobre los puntos A y B de la cara superior de la probeta. Esta, a su vez se apoya isostáticamente a través de los puntos D y E de su cara inferior.

La reacción en A induce un momento flector, sobre el canto útil en la sección de la entalla, que provoca apertura de la misma (modo de fractura I), mientras que la reacción en D induce un esfuerzo cortante en dicha sección que tiende a hacer deslizar los labios de la entalla (modo de fractura II). En los estados iniciales del proceso de progresión de la fisura, predomina el modo de fractura II mientras que en las situaciones intermedias se produce un

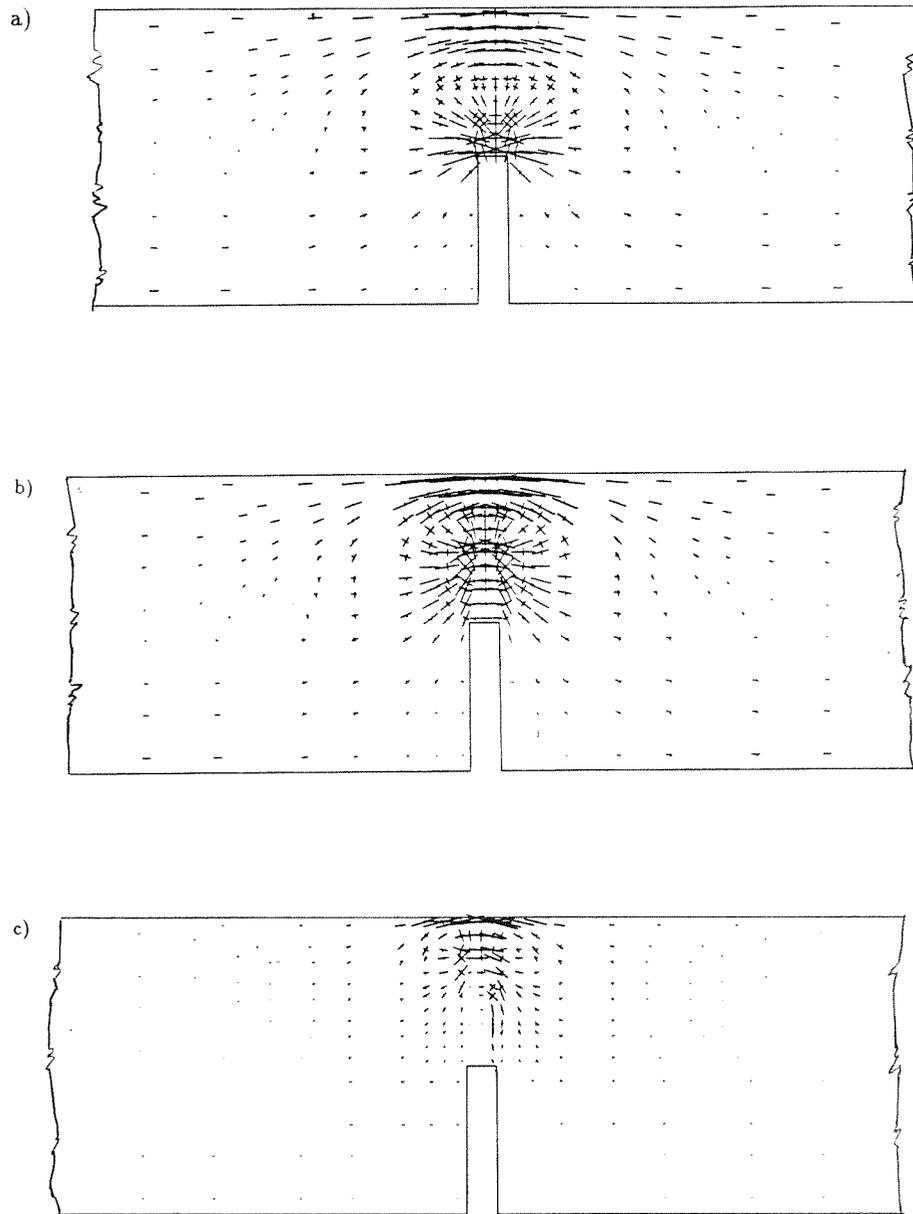


Figura 18. Ensayo a flexión de una viga entallada de hormigón simple.  
Tensiones principales en la viga:  
a) En el límite elástico - punto A.  
b) En el pico de tensiones - punto B.  
c) En el límite último - punto C.

estado combinado de ambos modos.

La simulación numérica del proceso de carga se realizó controlando el deslizamiento relativo de los labios de la entalla (C.S.D.). Con el fin de incluir en el ensayo numérico el efecto de la deformación de la viga metálica de carga, se consideró dicha viga en el análisis

II - Fractura Elastoplástica

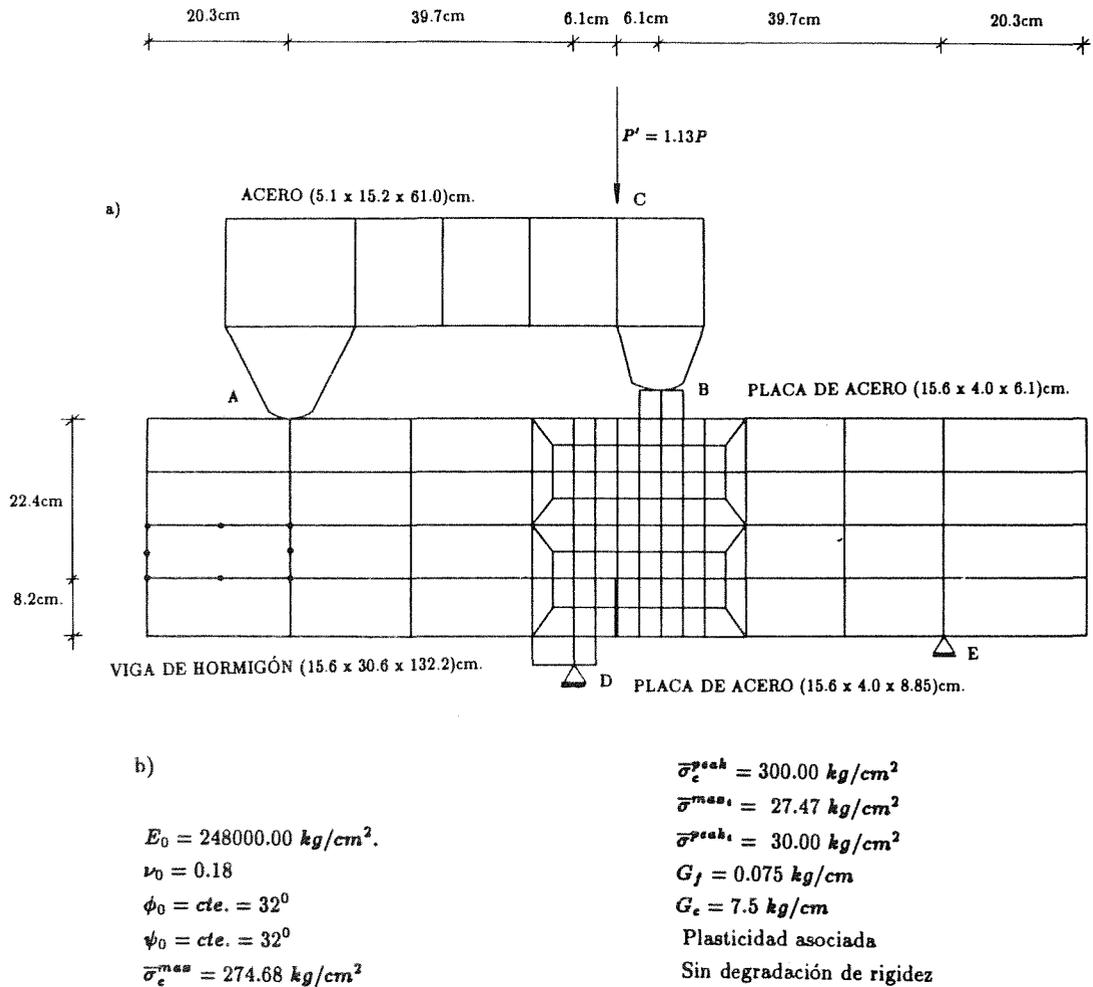


Figura 19. Ensayo de fractura en modo mixto. Viga de hormigón simple de Arrea e Ingraffea<sup>1</sup>:  
 a) Geometría y malla de elementos finitos.  
 b) Propiedades del material en [Kg] [cm].

en la hipótesis de que se comporta como un material elástico lineal. La discretización del conjunto, en elementos isoparamétricos de ocho nodos, se presenta en la Figura 19 en la que puede observarse el mayor grado de refinamiento de la malla en la zona donde se produce la fractura.

Los experimentos de Arrea e Ingraffea se realizaron con tres probetas de las mismas características. Los resultados carga aplicada-C.S.D., representados en la Figura 20, configuran la banda experimental. En la misma figura se presentan los resultados numéricos que muestran un muy buen grado de ajuste con los experimentales. Hay que mencionar que en ningún momento se hizo un esfuerzo para ajustar los resultados numéricos a los experimentales a base de modificar los datos del análisis que aparecen en la Figura 19.

Estos se obtuvieron de los datos proporcionados por los autores de los experimentos y, en los casos en que el dato era desconocido, se estimó su valor dentro del rango de variación del mismo para hormigones de las características de las ensayados.

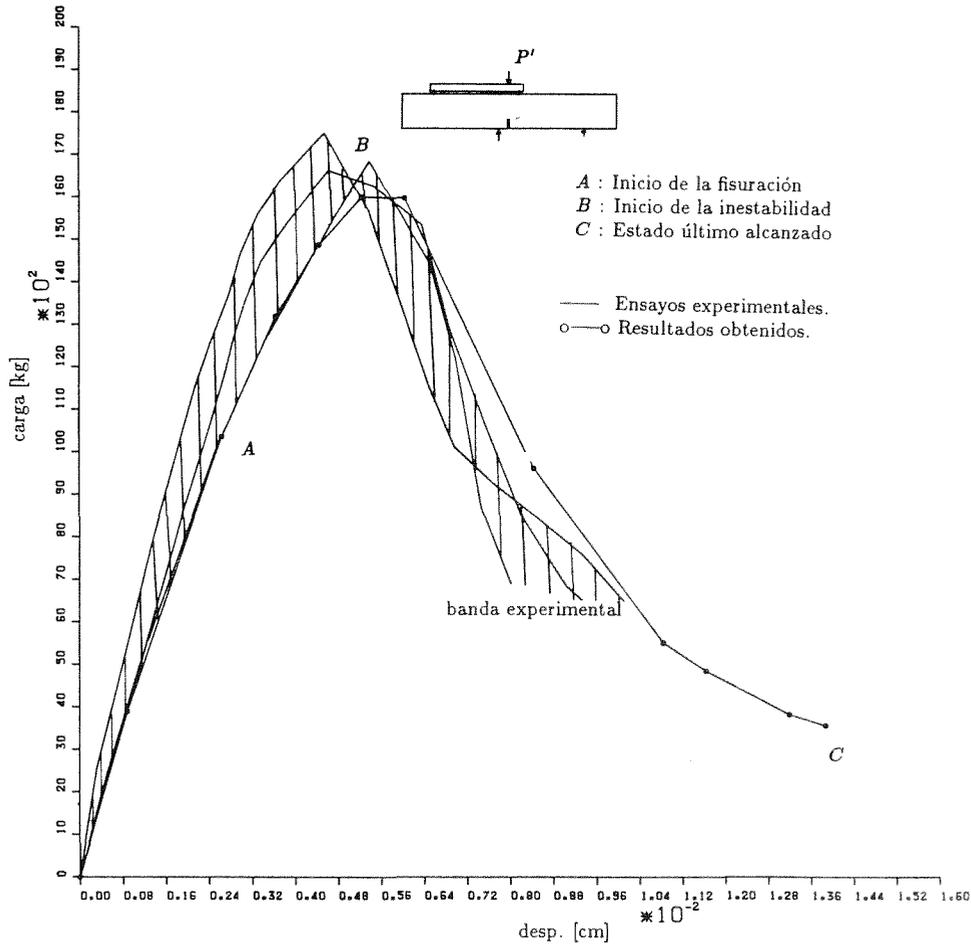


Figura 20. Ensayo de fractura en modo mixto. Viga de hormigón simple de Arrea e Ingrassia<sup>1</sup>: Carga  $P'$  - deslizamiento relativo entre caras de fisuras. El área sombreada muestra el rango de resultados experimentales obtenidos por Arrea e Ingrassia

En la curva presentada en la Figura 20 se caracterizan los estados de deformación A (inicio de la fisuración), B (inicio de la inestabilidad) y C (estado último analizado).

En la Figura 21.a se muestra la fisuración detectada por el modelo en el estado B en el que la microfisuración está orientada a 60 grados respecto a la horizontal y tiende a progresar en dirección vertical. En esta situación aparecen también algunas fisuras en la cara superior de la viga producidas por los esfuerzos de flexión. A partir de este instante, la fisuración empieza a localizar en una banda que progresa, a partir de la entalla, con una inclinación de

## II - Fractura Elastoplástica

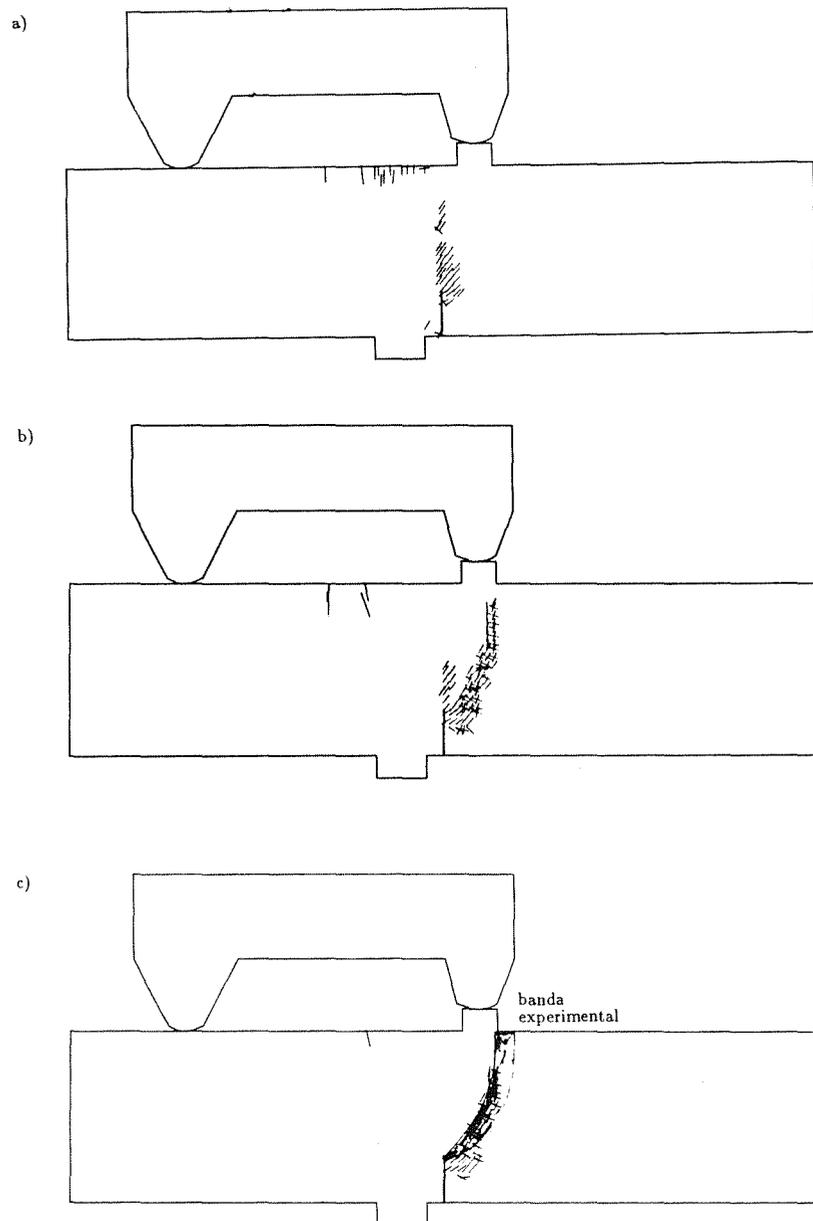


Figura 21. Ensayo de fractura en modo mixto. Viga de hormigón simple de Arrea e Ingraffea<sup>1</sup>. Estado de fisuración en la viga:  
a) Al pico de tensiones - punto B.  
b) En el límite último - punto C. Fisuras mayores al 3% de la máxima.  
c) En el límite último - punto C. Fisuras mayores al 5% de la máxima.

60 grados para, posteriormente, tender a progresar verticalmente debido al predominio del

modo I en los sucesivos estados de deformación (Figura 21.b). En la Figura 21.c, se compara la banda de fisuración que proporciona el modelo con la detectada experimentalmente.

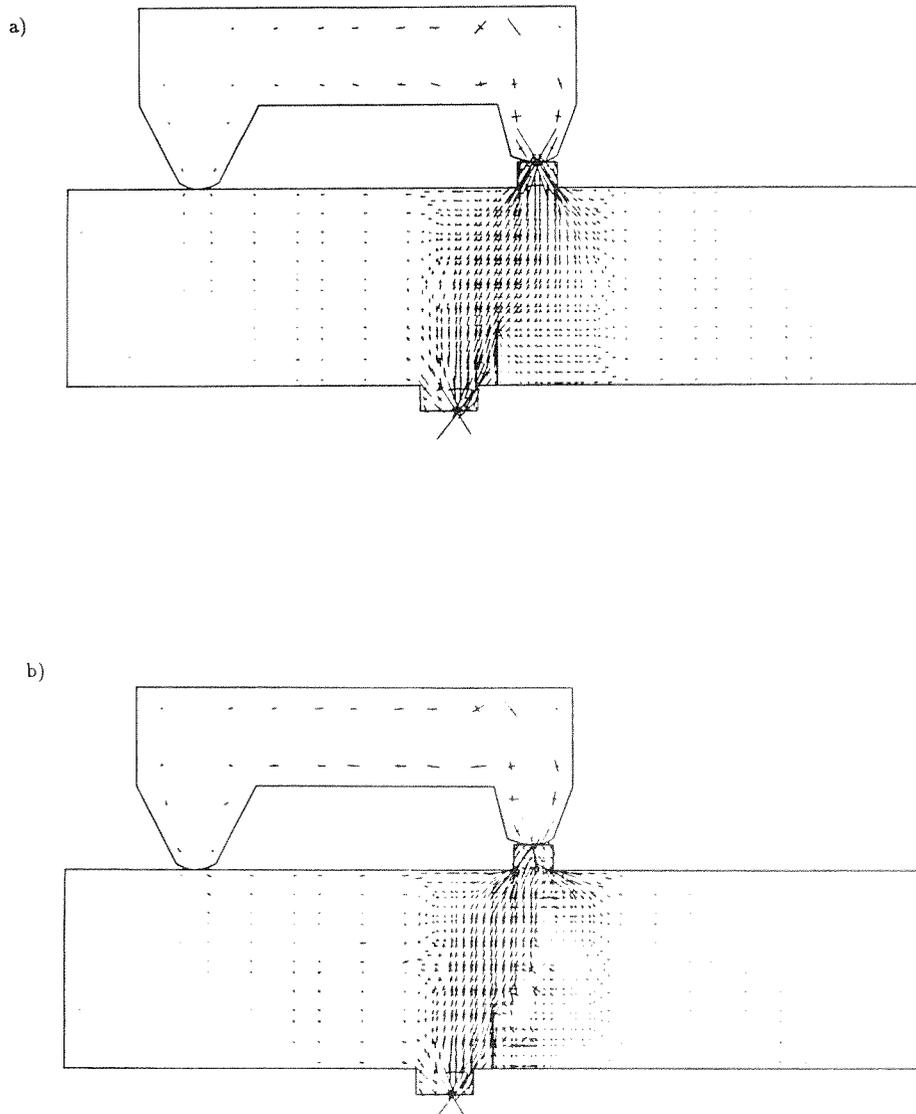


Figura 22. Ensayo de fractura en modo mixto. Viga de hormigón simple de Arrea e Ingrassia<sup>1</sup>. Tensiones principales en la viga:  
 a) En el límite elástico - punto A.  
 b) En el límite último - punto C.

En la Figura 22 se presentan las tensiones principales en el estado A de inicio de la fisuración y en el estado final analizado C. En este último caso, puede observarse la relajación de tensiones en la zona por donde discurre la fisura. Finalmente en la Figura 23 se muestra la deformada de la estructura al final del proceso de carga (amplificada 300 veces) donde

## II - Fractura Elastoplástica

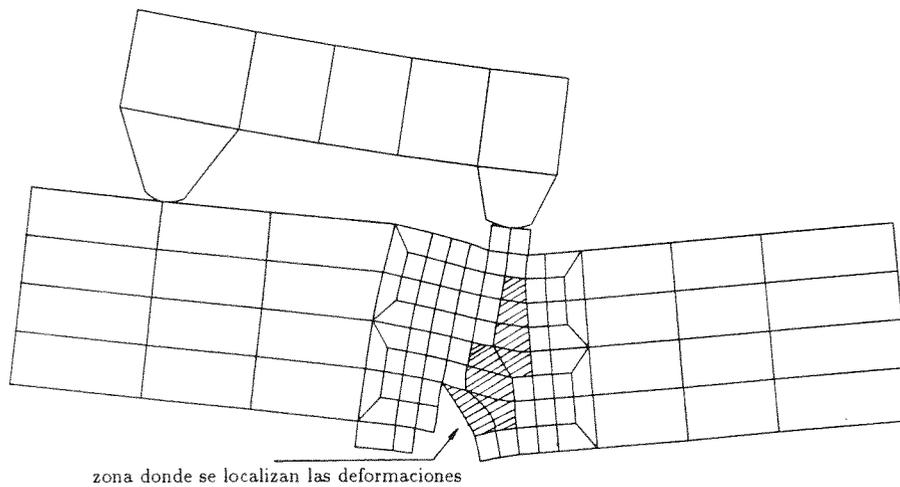


Figura 23. Ensayo de fractura en modo mixto. Viga de hormigón, simple de Arrea e Ingrassia<sup>1</sup>. Deformación de la viga y localización de deformaciones en el estado último (amplif. x 300.0)

puede observarse la localización de la deformación dentro de la banda de elementos que representa la fisura.

### 8. CONCLUSIONES

A lo largo de este artículo se ha puesto de manifiesto que la Teoría de la Plasticidad contiene los elementos necesarios para modelar numéricamente los procesos de fisuración o fractura. Por una parte, permite introducir el ablandamiento por deformación, circunstancia necesaria para inducir la localización de deformaciones en la banda de elementos finitos que simula la fisura. Por otra, permite introducir de una forma natural los procesos disipativos de energía que caracterizan a la fractura. Asimismo, mediante la Teoría la Plasticidad puede modelarse de forma adecuada el comportamiento del material y la disipación no local de energía para los estados tensionales de compresión predominante que se producen en las zonas cercanas a las de fractura. El comportamiento de estas zonas de compresión, y su adecuada modelización, puede afectar, en determinadas circunstancias, de forma muy importante a los resultados obtenidos.

El modelo elasto-plástico para materiales friccionales frágiles que se ha presentado es un ejemplo de aplicación de la Teoría de la Plasticidad a la Mecánica de Fractura. Los ejemplos analizados, muestran una buena aproximación a los resultados experimentales lo que constituye un indicador de las grandes posibilidades de este tipo de modelos. Evidentemente, hay también en ellos aspectos controvertidos como, por ejemplo, la gran cantidad de parámetros que se necesitan para caracterizar el comportamiento del material y el relativamente alto esfuerzo computacional que hay que realizar en el análisis. En todo caso constituyen una alternativa, válida y prometedora para profundizar en el conocimiento de los fenómenos de fractura.

REFERENCIAS

1. Arrea M. and Ingraffea A. R. "Mixed mode crack propagation in mortar and concrete", Cornell University, Department of Structural Engineering, *Report* Nro. 81-13, Ithaca, New York.
2. Bažant Z. "Mechanics of distributed cracking, *Appl. Mech. Rev.* Vol. **39** Nro. 5, pp. 675-705, (1986).
3. Bažant Z. and Oh B. "Crack band theory for fracture of concrete" *Mat. Construct.* **16** (93), pp. 155-177, (1983).
4. Borst R. De. "Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading unified approach", Paper submitted for consideration for publication in : *Mechanics of Materials*, (1987).
5. Borst R. De and Vermeer P. "Non associated plasticity for soils, concrete, and rock", *Heron* Vol. **29**, Delft, Netherlands, (1984).
6. Cervera M. and Hinton E. "Nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells using a three dimensional model", *Internal Report*, Department of Civil Engineering Univ. College of Swansea U.K., (1985).
7. Chen A. and Chen W. F. "Constitutive Relations for Concrete", *Journal of The Engineering Mechanics Division*, Vol. **101**, Nro. EM4, pp. 465-481, ASCE, (1975).
8. Chen W. F. and Ting E. "Constitutive models for concrete structures" *Journal of The Engineering Mechanics Division*, Vol. **106**, Nro. EM1, pp. 1-18, ASCE, (1980).
9. Dougill J. W. "On stable progressively fracturing solids", *Jour. Applied Math. Physics (ZAMP)*, **27**, (1976).
10. Frantziskonis G. and Desai G. S. "Constitutive model with strain softening", *Int. Jour. Solids structures*, Vol. **23**, Nro. 6, pp. 733-750, (1987).
11. Glemberg R. "Dynamic analysis of concrete structures", *Ph. D. Thesis*, Department of structural mechanics, chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, (1984).
12. Han D. J. and Chen W. F. "Strain space plasticity formulation for hardening-softening material with elastoplastic coupling", *Int. Jour. Solids structures*, Vol. **22**, Nro. 8, pp. 935-950, (1986).
13. Hillerborg A., Modeer M. and Petersson P. "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. **6**, Nro. 6, pp. 773-782, (1976).
14. Klisinski M. and Mroz Z. "Description of inelastic deformation and degradation of concrete", *Internal report*, Institute of fundamental technological research, Warszawa , Poland, (1987).
15. Lubliner J., Oller S., Oliver J. y Oñate E. "A plastic damage model for non linear analysis of concrete", *Internal report*, E.T.S. Ing. de Caminos, Univ. Pol. de Catalunya, Barcelona, Spain, (1987).
16. Murray D. W., Chitnuyanondh L., Khazal Y. and Chung Wong "Concrete Plasticity theory of biaxial stress analysis" *Jour. Eng. Mechanics Division* ASCE, Vol. **105**, Nro. EM6, pp. 989-1106, (1979).
17. Needleman A. and Tvergaard V. "Finite element analysis of localization in plasticity", From: *Finite elements special problems in solid mechanics*, Vol. **5**, Chap. 3, pp. 94-267, Ed. by Oden J. T., and Carey F., (1985).
18. Nilson A. "Non linear analysis of reinforced concrete by finite element method", *Journal A.C.I.*, Vol. **65**, Nro. 9, (1968).
19. Oliver J. y Fernandez Roure J. R. "Consideraciones sobre el modelo numérico de

## II - Fractura Elastoplástica

- distribución para el análisis de la fisuración de hormigón”, Artículo sometido a consideración, para ser publicado en : “Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería”, (1987).
20. Ortiz M., Leroy. Y. and Needleman. “A finite element method for localized failure analysis” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **61**, pp. 189, 214, North Holland (1987).
  21. Ottosen N. S. “Thermodynamic consequences of strain softening in tension” *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **112**, pp. 1152, 1164, (1986).
  22. Rashid Y. R. “Analysis of prestressed concrete pressure vessels” *Nuclear Engineering and Design*, Vol. **7**, Nro. 4, (1968).
  23. Rots J. G., Nauta P., Kusters G. and Blaauwendraad J. “Smearred crack approach and fracture localization in concrete” *Heron*, Vol. **30**, Delft, Netherlands, (1985).
  24. Simo J. C. and Ju J. M. “On continuum damage, elastoplasticity at finite strains: a computational framework”, Paper submitted for consideration for publication in: *Computational Mechanics*, (1987).
  25. Simo J. C. and Ju J. M. “Strain and stress based continuum damage model, Part I : Formulation”, Paper submitted for consideration for publication in : *Solids and Structures* (1987).
  26. “State of the art report on: Finite Element Analysis of Reinforced concrete”, *ASCE*, (1982).
  27. Valanis K. Z. “On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol., **52**, pp. 649, 653, (1985).
  28. Willam K. and Sobh N. “Bifurcation analysis of tangencial material operators”, *Int. Conf. on Num. Methods in Ingng., Theory and Applications, NUMETA*, Eds. Pande G. and Middleton J., Martinus Nijhoff Publishers, Swansea U.K., (1987).
  29. Chen W. F. “Plasticity in reinforced Concrete”, Mc Graw Hill, (1982).
  30. Zienkiewicz O. C. “El método de los elementos finitos”, Edit. Reverté, Barcelona, (1982).

# III - Fractura Cohesiva

## MÉTODOS NUMERICOS EN LA FRACTURA DE MATERIALES COHESIVOS

MANUEL ELICES  
JAIME PLANAS  
JAVIER LLORCA  
y  
GUSTAVO GUINEA

*Departamento de Ciencia de Materiales.  
Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.  
Universidad Politécnica de Madrid  
28040 - Madrid*

### 1. CARACTERISTICAS EN FRACTURA DE MATERIALES COHESIVOS

El objetivo de este artículo es dar una visión general de los métodos numéricos que se utilizan para estudiar la iniciación y propagación de grietas en materiales cohesivos y, en particular, del hormigón. En los materiales elásticos y frágiles se supone que no hay fuerzas de cohesión entre los labios de la fisura. En los materiales elastoplásticos simples —o sin endurecimiento por deformación— se supone que pueden actuar fuerzas de cohesión, iguales al límite de cedencia, desde el fondo de la fisura hasta una cierta distancia —esta región es la llamada *zona cohesiva*—. Los materiales cohesivos pueden considerarse una generalización de los materiales elastoplásticos simples descritos anteriormente, donde las fuerzas de cohesión no tienen por qué permanecer constantes. Para los hormigones supondremos que las fuerzas de cohesión en el fondo de la fisura son iguales a la resistencia a tracción y que van decreciendo a medida que se separan los labios de la fisura, según veremos más adelante.

El problema central de la Mecánica de la Fractura, en las aproximaciones clásicas, era el establecer en qué condiciones una fisura se propagaba. Dicho problema se abordaba añadiendo a las ecuaciones de la Mecánica de Medios Continuos un *criterio de fractura*. Este tratamiento condujo a una clara distinción —tanto conceptual como de cálculo— entre los métodos de Mecánica de Fractura y los métodos derivados de la Teoría Clásica del Agotamiento. Los métodos de la Mecánica de la Fractura se aplican cuando el modo

dominante de colapso es la propagación de una fisura, mientras que los métodos de la Teoría del Agotamiento se usan cuando el colapso está dominado por mecanismos plásticos.

Dicha dicotomía no resultó fructífera para hormigón y rocas porque, para la mayor parte de los casos prácticos, el comportamiento estructural no resultaba dominado por ninguno de los dos mecanismos extremos y tuvieron que desarrollarse nuevos modelos de fractura para conseguir una mejor descripción del comportamiento observado. Estos modelos se denominaron genéricamente *Modelos No Lineales de Fractura* y algunos de ellos, que son los que aquí nos interesan, no incluyen un criterio global de fractura y pueden describir la rotura progresiva del material sin recurrir a singularidades de tensiones (que es la esencia de la Mecánica de la Fractura Elástica). Dichos modelos están basados en dos conceptos íntimamente ligados: *Ablandamiento por Deformación* (Strain Softening) y un *criterio de Localización*.

El *ablandamiento por deformación* puede describirse como la pérdida progresiva de la capacidad de resistir tensiones cuando la deformación aumenta indefinidamente. El uso de relaciones tensión-deformación con ablandamiento puede conducir a resultados matemáticos inconsistentes con la experimentación si no se toman determinadas precauciones, porque la deformación tiende a localizarse en una zona de espesor nulo y como la energía de fractura —en estos modelos— es función del volumen deformado, resulta que la fractura se produce sin disipación energética, en contra de lo observado (véase, por ejemplo Bazant, 1986). La realidad es que los experimentos muestran que se produce una pérdida progresiva de resistencia y una localización de deformaciones que, finalmente, lleva a la aparición de una grieta y a la separación del cuerpo en dos trozos, pero muestran también que hay una disipación energética no nula.

El problema de disipación nula de los modelos con ablandamiento por deformación puede resolverse postulando algún *criterio de localización*, criterio complementario que fuerza a que la energía disipada no sea nula. Parece razonable que cuando un material, tipo roca u hormigón, se tracciona como se indica en la Figura 1, las deformaciones, después del máximo de carga, se localicen en una zona altamente microfisurada, pero con una distribución continua, como en la Figura 1a. Las dificultades actuales en la generación de formas generales de localización ha llevado a adoptar criterios más simples, como el de localización en una banda, Figura 1b (Bazant, 1983), o en una superficie (Hillerborg, Modeer y Petersson, 1976), Figura 1c. En este caso, aunque el volumen deformado es nulo, se postula una energía disipada no nula, como se detalla más adelante al considerar los modelos de fisura cohesiva. La idea esencial que hay que retener para llegar a una clasificación sistemática de los modelos de fractura es que el material se ablanda en una zona de fractura cuya forma y tamaño se especifica mediante el criterio de localización, en tanto que el material fuera de la zona de fractura se descarga.

Un modelo completo de fractura debe especificar, teniendo en cuenta los razonamientos anteriores, tres aspectos complementarios (Elices y Planas, 1988):

- A) El comportamiento del material fuera de la zona de fractura
- B) El comportamiento del material dentro de la zona de fractura y
- C) El criterio de localización.

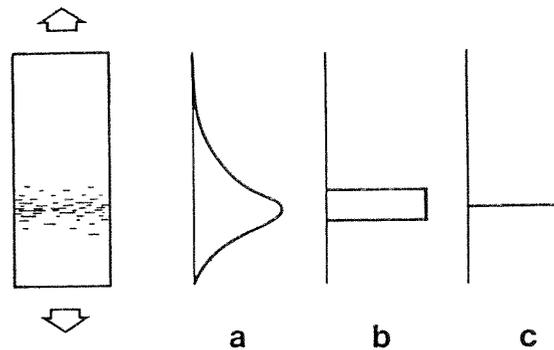


Figura 1.

La clasificación se realiza a través de la especificación de un código de tres letras (A,B,C) que identifica cada uno de los aspectos esenciales. Por el momento se han tomado en cuenta tres posibilidades para cada concepto, que se esquematizan en la Figura 2, y se explican a continuación:

- A. *Comportamiento fuera de la zona de fractura.* En general se producirá irreversibilidad y disipación de energía, tal como se representa en la Figura 2A-a. Denominamos a este comportamiento *daño general*, que incluye como caso límite el ablandamiento plástico (degradación del límite elástico sin degradación de la rigidez). Un buen número de modelos con ablandamiento presenta una descarga al origen, como en la Figura 2A-b. Esto se denomina *degradación de la rigidez*. Un conjunto de modelos muy particulares, pero muy utilizados, suponen que no hay disipación fuera de la zona de fractura, de forma que el tercer comportamiento a considerar es el comportamiento *elástico*, Figura 2A-c.
- B. *Comportamiento en la zona de fractura.* Este comportamiento puede clasificarse de la siguiente manera; daño general (Figura 2B-a), Degradación sólo de la rigidez (Figura 2B-b) o degradación sólo del límite elástico (Figura 2B-c). Debe notarse que cuando las deformaciones son monótonas crecientes en la zona de fractura, los tres tipos de comportamiento son indistinguibles. Una gran proporción de los modelos usados en la práctica son formulaciones monótonas de cualquiera de los comportamientos anteriores.
- C. *Criterio de localización.* Aunque se deja abierta la posibilidad de criterios más generales de localización, como se indica en la Figura 2C-a, los criterios usuales son el de localización en una banda —*Modelos de Banda Cohesiva o de Fisuración en Banda*, Figura 2C-b— o de localización en una fisura —*Modelos de Fisura Cohesiva*, Figura 2C-c—.

Para dar algunos ejemplos, el modelo utilizado más frecuentemente por Bazant puede clasificarse como (c,x,b) donde x indica comportamiento en descarga no especificado en la zona de fractura; el Modelo de la Fisura Ficticia de Hillerborg se formula, en su versión más sencilla, como (c,x,c); el modelo utilizado por Rots y colaboradores es un modelo (c,b,b).

Por ahora, parece que la descripción detallada del comportamiento fuera de la

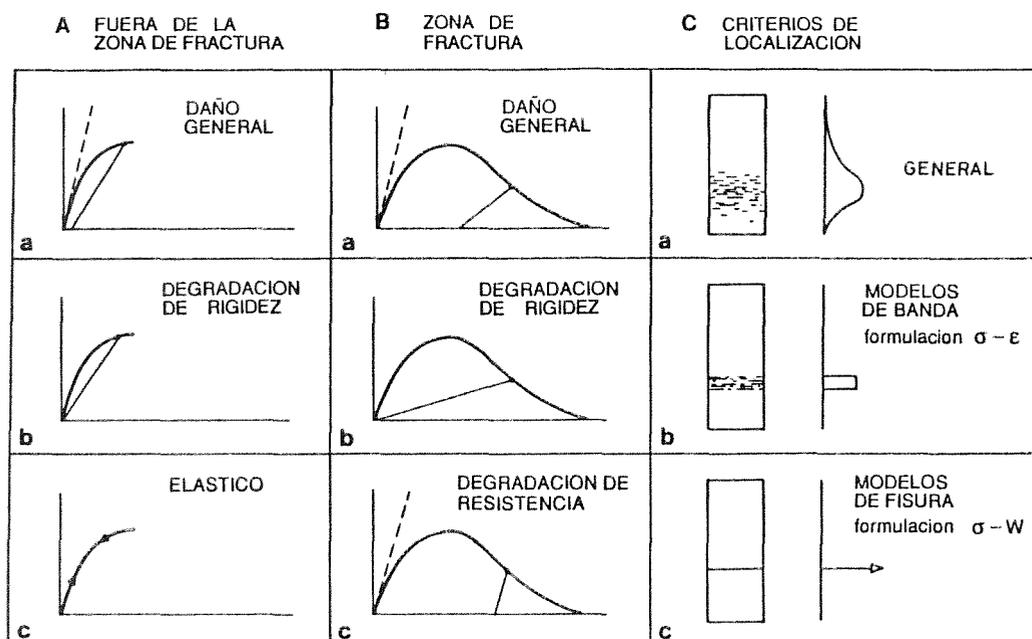


Figura 2.

zona de fractura no es imprescindible para captar lo esencial del comportamiento en fractura. La descripción de la descarga dentro de la zona de fractura es también un refinamiento innecesario para entender los hechos experimentales más importantes. Lo que es radicalmente distinto es la formulación matemática y el tratamiento práctico de los modelos de banda y de los modelos de fisura, debido a que los primeros utilizan una formulación en tensiones y deformaciones unitarias y los segundos una formulación en tensiones y desplazamientos de bordes de fisura, lo que justifica un tratamiento separado para ambos tipos de modelos, aunque conceptualmente sean muy similares, si no idénticos.

## 2. MODELOS DE FISURA COHESIVA

Como se ha indicado, la disipación en el material fuera de la zona de fractura no es un aspecto esencial de los modelos de fractura progresiva, por lo que en este apartado consideraremos únicamente modelos del tipo (c,x,c).

Versiones especiales de estos modelos, surgidas por distintos motivos físicos, se han usado desde hace tiempo; Baremblat (1962) utilizó este concepto considerando las fuerzas de atracción atómica en una pequeña región cerca del borde de la fisura. Dugdale (1960) propuso un modelo matemáticamente similar para mantener finitas las tensiones en el borde de fisura. Una nueva interpretación de estos conceptos fue realizada por Rice (1968). La aplicación de las ideas básicas a la fractura del hormigón fue iniciada por Hillerborg (Hillerborg et al., 1976). Desde entonces se han realizado un buen número de trabajos, tanto teóricos como aplicados, en los que los modelos de fisura cohesiva desempeñan un papel muy

importante. Conviene hacer notar que todavía no se ha conseguido una teoría completamente general, a pesar de los esfuerzos realizados en los campos teórico y experimental. La teoría está bien desarrollada para sólidos isótropos, para apertura pura (Modo I), y para sollicitación monótona, pero el comportamiento de una fisura cohesiva para medios anisótropos, modos mixtos, o sollicitación no monótona está todavía sujeto a especulación.

### 2.1. Hipótesis básicas

La definición completa de un modelo de fisura cohesiva requiere la especificación del comportamiento del material fuera de la zona de fractura, la especificación de la condición para la formación de la fisura cohesiva, y la especificación de las ecuaciones de evolución de la fisura cohesiva. Estas tres condiciones se definen como sigue:

- *Comportamiento del material fuera de la zona de fractura.* Los materiales que no presentan disipación volúmica deben ser elásticos. Normalmente se suponen además *elásticos lineales*. Para el hormigón suele suponerse un comportamiento *elástico lineal e isótropo*, definido, en consecuencia, por su módulo de elasticidad,  $E$ , y su coeficiente de Poisson,  $\nu$ .
- *Iniciación de la fisura.* Para materiales *isótropos*, se suele suponer que el comportamiento en un punto es elástico hasta que la tensión principal mayor alcanza la *resistencia a tracción*,  $f_t$ . En este momento, la fractura se inicia como una fisura cohesiva (que transmite tensiones) perpendicular a la tensión principal mayor. Por lo tanto, se admite que la condición para iniciación de la fisuración es independiente de la triaxialidad. Esta suposición podría, obviamente, eliminarse para tener en cuenta la influencia de las tensiones transversales en la resistencia, pero este refinamiento no se ha llevado a la práctica. Falta por completo una generalización a materiales anisótropos.
- *Evolución de la fisura.* Una vez que la fisura cohesiva se ha formado, se supone que la tensión transferida a través de la fisura es función del desplazamiento relativo entre las caras de la fisura. Para *apertura pura*, la tensión transferida,  $\sigma$ , es normal a las caras de la fisura y se supone que depende únicamente de la evolución de la apertura de la fisura,  $w$ . Por lo tanto, se desprecian de nuevo los efectos de la triaxialidad. Para *apertura monótona* de la fisura, la tensión transferida está unívocamente definida por la apertura de fisura, en la forma:

$$s = f(w) \tag{1}$$

donde la función  $f(w)$  describe el ablandamiento del material y se denomina *función de ablandamiento*, o, en representación gráfica, *curva de ablandamiento*. La función  $f(w)$  depende del material particular considerado, pero no de las condiciones externas, por lo tanto es una *función material*.

### 2.2. Curvas de ablandamiento y parámetros asociados.

La curva de ablandamiento se supone no negativa y no creciente, como se esquematiza en la Figura 3. Para ser consistente con la condición de formación de la fisura, el valor de la

tensión para apertura de fisura nula debe ser igual a la resistencia a tracción  $f_t$ . Cuando la apertura de fisura aumenta, la tensión disminuye y, eventualmente, se anula para la *apertura crítica de fisura*,  $w_c$ .

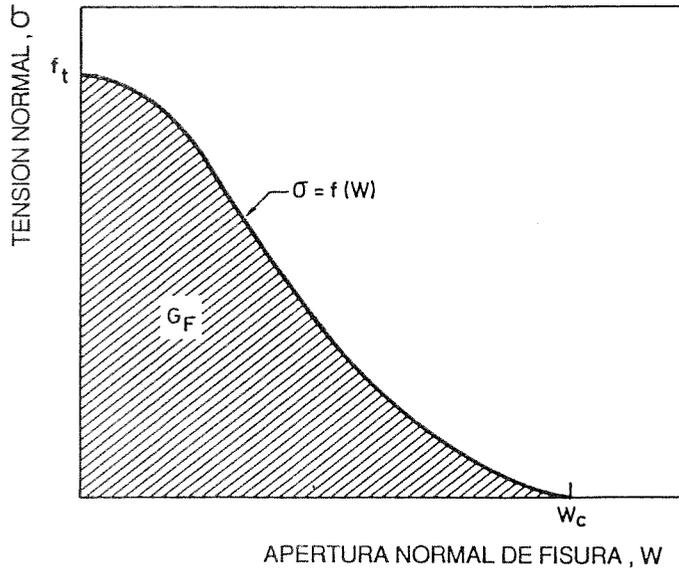


Figura 3.

El área debajo de la curva de ablandamiento representa la energía disipada en una unidad de área fija cuando la fisura la atraviesa hasta rotura total (Planas y Elices, 1985). Se denomina *energía de fractura* y se escribe  $G_F$ . Obviamente,  $G_F$  es un parámetro material en tanto la curva de ablandamiento sea una función material.

A partir de los parámetros elásticos y los parámetros de fractura, pueden definirse dos magnitudes con dimensiones de longitud. Se denominan *apertura característica de fisura*,  $w_{ch}$ , y *longitud característica*,  $l_{ch}$  (Hillerborg et al., 1976), y sus expresiones son:

$$w_{ch} = \frac{G_F}{f_t} \quad (2)$$

$$l_{ch} = \frac{EG_F}{f_t^2} \quad (3)$$

Los parámetros  $w_{ch}$  y  $l_{ch}$  son útiles para reducir las dimensiones estructurales a forma adimensional y dan lugar a los *números de fragilidad estructural*, que cuantifican la fragilidad de un elemento estructural dado.

Una vez que la función de ablandamiento es conocida, el análisis de la propagación de una fisura es, teóricamente, muy simple. La Figura 4 muestra una probeta cargada simétricamente de forma que la fisura se propaga en modo de apertura pura. Como el volumen del material permanece en régimen elástico, el problema se reduce a un problema

de elasticidad con geometría y condiciones de contorno variables. Para una longitud de fisura presupuesta (geometría fijada), es necesario cumplir condiciones de contorno clásicas sobre el contorno exterior y condiciones de contorno  $\sigma = f(w)$  sobre la fisura cohesiva, tal como se indica en la Figura 4. El problema tiene solución única si se especifica que la tensión debe ser continua en el extremo de la fisura y permanecer acotada. Cuando la probeta se carga de forma que se desarrolla una única fisura, y no hay otras causas de disipación energética aparte de la rotura por tracción, es evidente que el suministro total externo de energía necesario para romper completamente la probeta es, simplemente,  $G_F$  multiplicado por la superficie de la fisura formada. Por lo tanto  $G_F$  es la energía media por unidad de área de fisura completa. Esta es la base para el procedimiento RILEM medir la energía de fractura de hormigón (RILEM, 1985).

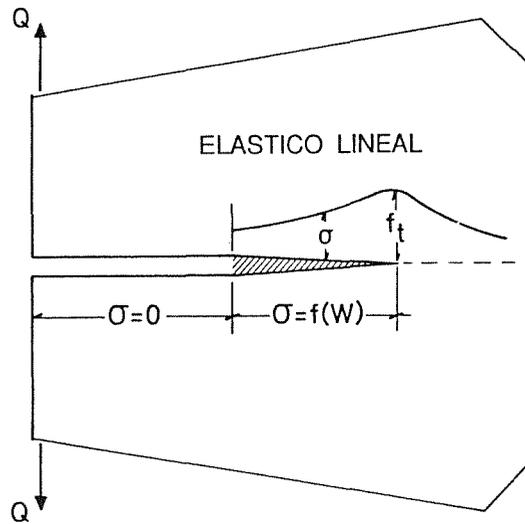


Figura 4.

Sin embargo, como el método está basado en hipótesis secundarias de difícil verificación, se ha propuesto una definición experimental (Elices y Planas, 1988):

$$G_{FE} = (\text{Suministro externo de energía})/(\text{superficie de fisura}) \quad (4)$$

Solamente cuando se eliminan las fuentes espúreas de disipación energética y cuando la curva de ablandamiento puede considerarse una propiedad del material, sólo entonces,  $G_{FE} = G_F$ . Por tanto, conviene distinguir entre valores experimentales, que pueden corresponder a una situación en que la teoría expuesta no es aplicable, y valores teóricos, que corresponden a condiciones idealizadas.

Aún en el caso de que la experimentación se corresponda bien con la teoría, es preciso tener en cuenta que el valor de  $G_F$  no es suficiente para resolver los problemas de fractura. Es esencial conocer la forma de la curva de ablandamiento (véase, por ejemplo, los comentarios de Alvarado y Torrent, 1987).

La determinación experimental directa de la curva de ablandamiento puede llevarse a cabo mediante ensayos estables de tracción directa (Pettersson, 1981; Reinhardt, 1984; Planas y Elices, 1985). Sin embargo, las dificultades experimentales son grandes, lo que hace que para el cálculo se supongan formas aproximadas de la curva de ablandamiento, basadas en estudios experimentales de unos pocos autores. Pettersson (1981) propuso la forma bilineal esquematizada en la Figura 5, que, utilizada en programas de cálculo numérico, da buenos resultados. Otras formas más elaboradas de la curva de ablandamiento han sido también propuestas, basadas en modificaciones de exponenciales decrecientes (Cornelissen et al, 1986; Planas y Elices, 1986). Sin embargo, la mayor parte de resultados numéricos disponibles han sido obtenidos con la forma bilineal de la Figura 5.

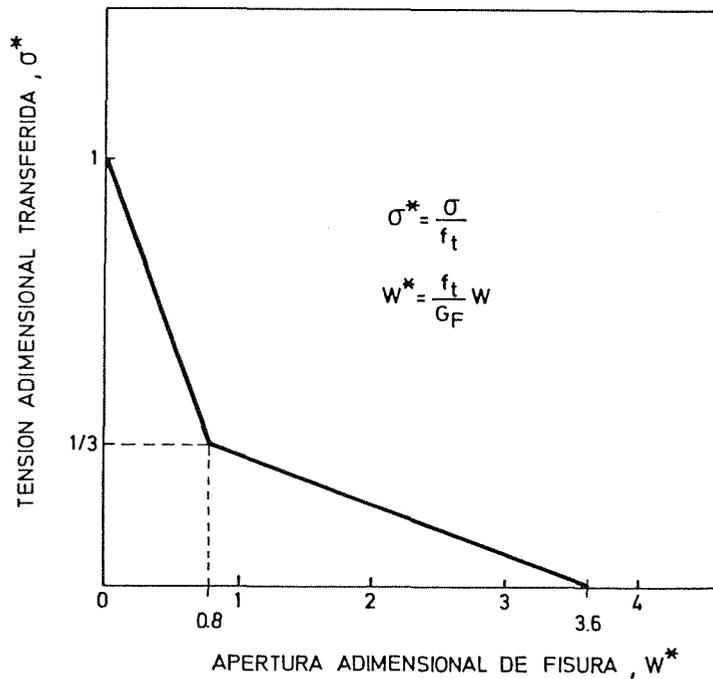


Figura 5.

### 3. MODELOS DE BANDA COHESIVA

Los modelos de banda que consideraremos aquí son, por las mismas razones aducidas en el caso de fisura cohesiva, modelos que no presentan disipación fuera de la zona de fractura, por tanto modelos del tipo (c,x,b).

La concepción más sencilla de un modelo de banda es el que representa la zona de fractura no como una fisura única, sino como una distribución uniforme de microfisuras paralelas en una banda de espesor fijo  $h_c$ . A primera vista, podría tomarse como una

formalización de la antigua aproximación de fisuración difusa (Smearred crack approach) utilizada para el análisis mediante elementos finitos de problemas de hormigones y rocas. En la versión más simple de aquel método, la rigidez de un elemento finito se hacía nula cuando la tensión en él alcanzaba la resistencia a tracción, y ello *independientemente del tamaño del elemento*. Un análisis sistemático realizado por Bazant y Cedolin (Bazant y Cedolin, 1979), mostró que aquella aproximación daba lugar a falta de objetividad respecto de la malla y que convergía a resultados incorrectos cuando se refinaba la malla indefinidamente. El modelo de banda de fisuración como tal, tomó cuerpo a principios de los 80 debido fundamentalmente al trabajo de Bazant y colaboradores.

En la actualidad, debido al desarrollo de los modelos constitutivos basados en la formulación en variables internas, existe una gran variedad de posibles formulaciones de modelos de banda, entre los que se cuenta el modelo basado en reglas de flujo plástico que se presenta en otro capítulo de este volumen, desarrollado por Oliver, Oller y Oñate. Aquí presentamos la más sencilla (y probablemente físicamente más inteligible) de las versiones de modelos de banda, desarrollada esencialmente por Bazant y Oh (1983), y Rots et al. (1985). Otros modelos más complejos basados en la teoría de variables internas pueden verse en Elices y Planas, (1988).

### 3.1. Hipótesis básicas

Como en un modelo de fisura, un modelo de banda debe especificar el comportamiento del material fuera de la zona de fractura, la condición de formación de la banda de fisuración y la evolución de la banda de fisuración. En el modelo tipo (c,x,b) las especificaciones son las que se dan a continuación:

- *Comportamiento del material fuera de la zona de fractura:* Los materiales que no presentan disipación volúmica deben ser elásticos. Normalmente se suponen además *elásticos lineales*. Para el hormigón suele suponerse un comportamiento *elástico, lineal e isótropo*, definido, en consecuencia, por su módulo de elasticidad,  $E$ , y su coeficiente de Poisson,  $\nu$ .
- *Iniciación de la fisuración:* Para materiales *isótropos* se supone normalmente que el comportamiento en un punto es elástico lineal hasta que la tensión principal mayor alcanza la *resistencia a tracción*,  $f_t$ . En este momento, la fractura se inicia como un conjunto de fisuras perpendiculares a la tensión principal mayor, densa y uniformemente distribuidas sobre la anchura de banda *fija*  $h_c$ . Por lo tanto, se admite que la condición para iniciación de la fisuración es independiente de la triaxialidad, igual que en el modelo de fisura cohesiva. Esta restricción se elimina en ciertos modelos más complejos, en los cuales la banda de ablandamiento no puede ya interpretarse como una distribución uniforme de fisuras paralelas.
- *Evolución de la fisuración:* Una vez que la banda cohesiva se ha formado, se supone que la orientación de las fisuras permanece fija y que los tensores de tensiones y de deformaciones permanecen constantes a través del espesor de la banda. Las tensiones y deformaciones en la banda están relacionadas por una ecuación constitutiva que presenta ablandamiento. Como en el modelo de fisura cohesiva, se supone que el vector tensión

que actua sobre las caras de las fisuras depende, (de una manera que será especificada más adelante), de la apertura media de las fisuras de la banda. La relación necesaria para poder realizar cálculos es de caracter tensorial y, por tanto, más compleja que la relación vectorial necesaria para la fisura cohesiva.

### 3.2. Formulación matemática de las relaciones $\sigma$ - $\epsilon$ en la banda

Como se ha indicado, en este modelo se supone que la zona de ablandamiento puede representarse como una banda de espesor fijo,  $h_c$ , en la cual ha tenido lugar una fisuración múltiple uniforme, tal como se representa en la Figura 6a. Considérese un elemento de la banda, como el representado en las Figuras 6a y 6b, con aristas perpendiculares y paralelas al plano de la banda, definido por su normal unitaria  $\mathbf{n}$ .

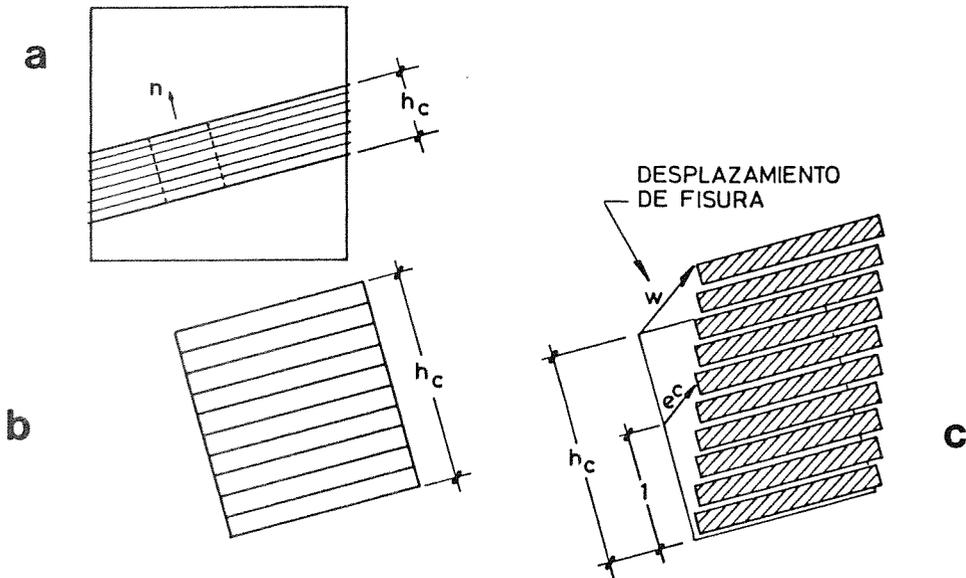


Figura 6.

La deformación inducida por la apertura de las fisuras únicamente (es decir, considerando material rígido entre las fisuras) tiene la forma indicada en la Figura 6c, donde el vector  $\mathbf{w}$  es el desplazamiento total de las fisuras en el elemento, y la deformación se supone homogénea. Definiendo el desplazamiento de fisura medio por unidad de espesor de banda,  $\mathbf{e}^c$ , como

$$\mathbf{e}^c = \frac{\mathbf{w}}{h_c} \quad (5)$$

El tensor de deformaciones infinitesimales inducido por la fisuración,  $\boldsymbol{\epsilon}^c$ , está dado por

$$\boldsymbol{\epsilon}^c = \frac{(\mathbf{e}^c \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^c)}{2} \quad (6)$$

donde  $\otimes$  indica producto tensorial de dos vectores y caracteres griegos en negrita indican tensores. La deformación total del elemento se obtiene por adición de las deformaciones de fisuración,  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ , y las deformaciones,  $\boldsymbol{\varepsilon}^\theta$ , del material entre las fisuras, que se supone que permanece elástico:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\theta + \boldsymbol{\varepsilon}^c \quad (7)$$

Las ecuaciones (5) a (7) representan la cinemática interna de la banda de fisuración que queda definida en términos de la deformación total  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y de una única variable interna evolutiva de carácter vectorial,  $\mathbf{e}^c$ , directamente relacionada con el desplazamiento  $\mathbf{w}$  de las fisuras. La normal  $\mathbf{n}$  es fija una vez producida la banda de fisuración.

Las ecuaciones cinemáticas deben completarse con relaciones tensión-deformación. La tensión (vector) transferida entre los labios de las fisuras,  $\mathbf{t}$ , se supone que depende exclusivamente de la evolución de la apertura de las fisuras, es decir, de  $\mathbf{e}^c$ , y la tensión (tensor) en el material entre fisuras,  $\boldsymbol{\sigma}$ , está relacionada con la deformación correspondiente,  $\boldsymbol{\varepsilon}^\theta$ , a través de la ecuación clásica de la elasticidad isótropa. Además, la condición de continuidad de tensiones requiere que  $\mathbf{t}$  coincida con  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ . Las ecuaciones que definen el problema son, pues,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^c) = (1 + \nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad (8)$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \phi(\mathbf{e}^c; \mathbf{n}) \quad (9)$$

donde  $\phi(\mathbf{e}^c; \mathbf{n})$  es un funcional dependiente de la evolución de  $\mathbf{e}^c$ . Las ecuaciones (8) y (9), equivalentes a 9 ecuaciones escalares, permiten, (para una deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dada), determinar las 6 componentes del tensor de tensiones,  $\boldsymbol{\sigma}$ , y las 3 componentes del vector  $\mathbf{e}^c$ . La ecuación (9) no es otra que la ecuación que relaciona la tensión transferida a través de las fisuras con el desplazamiento entre bordes de fisuras. Esto significa que el funcional  $\phi(\mathbf{e}^c; \mathbf{n})$  es el mismo, excepto por factores de escala constantes, que el que se tendría para una fisura cohesiva.

### 3.3. Curvas de ablandamiento en modo de apertura pura.

Cuando  $\mathbf{w}$ , y por tanto  $\mathbf{e}^c$ , tiene la dirección de la normal, la ecuación (9) se reduce a una ecuación escalar entre la componente normal del tensor de tensiones,  $\sigma_{nn} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$ , y la componente normal (única distinta de cero) de  $\mathbf{e}^c$ ,  $e_n^c = \mathbf{e}^c \cdot \mathbf{n}$ :

$$\sigma_{nn} = f(\mathbf{w}) = f(h_c e_n^c) = \phi(e_n^c) \quad (10)$$

donde  $f(\mathbf{w})$  es la misma función de ablandamiento que para la fisura cohesiva, ecuación (1). Cuando la ecuación (10) se representa gráficamente en función de  $e_n^c$ , como en la Figura 7, el área bajo la curva de ablandamiento,  $g_F$ , tiene el carácter de una energía por unidad de volumen de banda, y es posible demostrar que puede definirse, (como para la fisura cohesiva), una energía de fractura  $G_F$  tal que

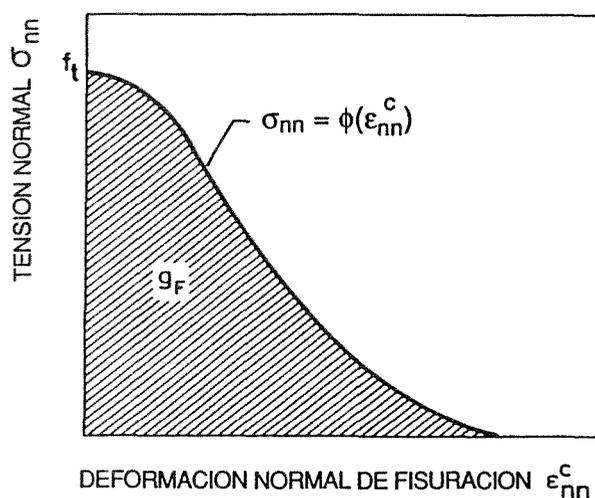


Figura 7.

$$G_F = h_c g_F \quad (11)$$

con lo cual la analogía entre fisura y banda cohesiva se completa.

### 3.4. Curvas de ablandamiento en modo mixto.

Cuando las fisuras presentan desplazamientos normales y tangenciales, (como se indica en la Figura 6) el modo de deformación se denomina mixto. No existen, por el momento, relaciones aceptadas universalmente para este tipo de sollicitación. Sin embargo existe una aproximación propugnada por algunos autores que se ha utilizado en la práctica. En dicha aproximación, se supone que la tensión normal está unívocamente definida por la apertura normal de fisura (en el supuesto de que sea monótona creciente), a través de la ecuación (10) y que la tensión tangencial es proporcional al desplazamiento tangencial de las fisuras. Esto se representa de la forma siguiente:

$$\sigma_{nn} = \phi(e_n^c) \quad (12)$$

$$\sigma_{\mathbf{n}} - \sigma_{nn} \mathbf{n} = \beta \left[ \frac{E}{2(1+\nu)} \right] (e^c - e_n^c \mathbf{n}) \quad (13)$$

donde  $\beta$  se denomina factor de retención en cortante y expresa la relación entre el módulo de rigidez elástico y el módulo de rigidez equivalente para las fisuras. Cuando no existe fisuración  $\beta = \infty$ , y en cuanto se produce la fisuración  $\beta$  cae bruscamente a un valor bajo, inferior a la unidad. Se han tomado valores de  $\beta$  entre 0,1 y 0,001, y para que los resultados sean consistentes es necesario utilizar el valor más bajo para sollicitaciones muy próximas al modo de apertura pura. Desde el punto de vista teórico es muy poco satisfactoria la discontinuidad que lleva de un valor infinito a un valor constante finito al pasar de una

situación de fisuración inminente a fisuración recién iniciada. Más razonable sería suponer que varía continuamente a medida que se abre la fisura. Algunos modelos se han desarrollado en esa dirección, pero la carencia de resultados experimentales no permiten afirmar que su funcionamiento sea mejor que el del modelo discontinuo.

#### 4. IMPLEMENTACION NUMERICA DEL MODELO DE FISURA COHESIVA

##### 4.1. Introducción

El análisis numérico de una fisura cohesiva se ha realizado mediante el método de los elementos finitos. Este procedimiento, aún siendo potente, presenta dificultades de varios tipos; unas emanan de la modelización y tratamiento numérico de la zona cohesiva, proceso no lineal donde las fuerzas no son proporcionales a los desplazamientos. Otras dificultades provienen de la modelización de la propagación de la grieta en modo mixto. La dirección de la fisura se puede estimar en cada incremento de carga a partir de criterios sencillos, aunque se ha mencionado en el apartado 2 que se carece de una teoría satisfactoria para este modo de propagación. Para que la malla de elementos finitos sea capaz de representar con precisión los elevados gradientes que se producen junto al extremo de la fisura es preciso refinar la malla en esta región y ello obliga a cambiar la topología de la malla en cada incremento de la longitud de la grieta.

Las hipótesis básicas de los modelos de fisura cohesiva para estudiar la fractura progresiva en hormigón han sido expuestos anteriormente. Los modelos numéricos difieren en las técnicas y algoritmos utilizados para resolver los problemas de cambio de topología y no linealidad (Pettersson, 1981; Hillerborg, 1985; Carpinteri, Colombo, Ferrara y Giuseppetti, 1987; LLorca, Elices e Ingrassia, 1987). La discusión detallada de todos ellos cae fuera de los objetivos de este trabajo. Nos limitaremos a comentar a grandes rasgos las características de cada uno y analizar en detalle uno de ellos.

Los dos primeros modelos (uno desarrollado por Hillerborg y Pettersson y el otro por Carpinteri y sus colaboradores) poseen la misma filosofía de cálculo. Consisten en sustituir las fuerzas de cohesión generadas en la fisura por cargas exteriores aplicadas en los nudos que simulan la grieta. Sucesivos cálculos por elementos finitos con una misma geometría permiten calcular la influencia que ejerce sobre los desplazamientos  $w$  de los nudos de la fisura una carga unidad situada en uno de ellos. Se obtiene así una matriz de influencias que permite calcular, para una longitud de la fisura y curva de ablandamiento determinadas, cuál es el valor de la carga exterior que hay que aplicar para que se propague la fisura. Estos métodos tienen la ventaja de que, una vez calculada la matriz de influencia, es elemental realizar simulaciones con diferentes curvas de ablandamiento. El principal inconveniente estriba en que hay que fijar a priori la trayectoria de la grieta y, por lo tanto, el método es válido únicamente para estudiar problemas de fisura cohesiva cuando la trayectoria se conoce de antemano.

El código que ha resuelto de manera más eficaz y versátil los problemas de modificación de la topología es el denominado FEFAP (Finite Element Fracture Analisis Program). En su versión original, FEFAP fue desarrollado para estudiar la propagación de una fisura en un medio bidimensional para un material elástico y lineal (Sauoma, 1981; Elices, LLorca e

Ingraffea, 1985). Entre sus capacidades se encontraba un algoritmo que permite modificar la topología de la malla de elementos finitos para simular la aparición y propagación de una fisura en una dirección y con una longitud arbitrarias. El algoritmo estaba preparado para evitar la aparición de elementos muy distorsionados y optimizar el número y tamaño de los elementos junto al extremo de la fisura. El remallado induce siempre un aumento del ancho de banda de la matriz de rigidez. Para evitar que los tiempos de cálculo se incrementen excesivamente, el programa está dotado de una eficiente rutina para reenumerar los nudos y lograr un ancho de banda mínimo.

Basándose en este programa se ha desarrollado una nueva versión para analizar el modelo de fisura cohesiva (LLorca, Elices e Ingraffea, 1987). Las ecuaciones constitutivas utilizadas por el programa son del tipo (c,b,c) dentro de la clasificación propuesta en la Figura 2 (Elices y Planas, 1988). Para representar el comportamiento en la fisura se puede escoger cualquier curva de ablandamiento. La fisura puede transmitir tensiones normales y tangenciales. Ambas son funciones de  $w$  y de los desplazamientos relativos tangenciales  $s$  entre los labios de la fisura. De este modo se pueden estudiar, en principio, problemas en modo de apertura puro y en modo mixto.

#### 4.2. Proceso de cálculo

Un primer cálculo elástico y lineal permite conocer el valor de la carga exterior  $P$  para el que la tensión alcanza  $f_t$  en un punto. El programa modifica la malla automáticamente, generando una fisura en ese punto e inserta, entre los nudos que simulan la grieta, unos elementos de junta para representar el comportamiento cohesivo. La dirección de la fisura es perpendicular a la tensión principal máxima en el punto estudiado de acuerdo con las hipótesis del modelo de fisura cohesiva. La longitud inicial de la fisura es seleccionada por el usuario.

Una vez iniciada la fisura se postula que se propagará cuando la tensión en el extremo de la fisura cohesiva sea igual a  $f_t$ . El objetivo es encontrar el valor  $P_c$  de la carga exterior para el que se cumple la condición anterior, estando en equilibrio las fuerzas nodales en todo el elemento estudiado. Esto se consigue mediante una doble iteración que se ha esquematizado en la Figura 8, para el caso de propagación en modo de apertura puro. A partir de la carga  $P$ , el usuario selecciona un nuevo valor de la carga exterior  $P_1$ . Para este nuevo valor de la carga se vuelve a analizar el problema y se calculan los desplazamientos en todos los nudos. Con ellos se determina la rigidez de los elementos de junta a partir de la relación  $\sigma - w$  y se vuelve a comenzar el proceso. Este proceso se repite hasta que, en dos cálculos sucesivos, se obtienen valores iguales de los desplazamientos nodales indicando que, en toda la superficie de la grieta, se verifica la relación constitutiva entre tensiones y aperturas de fisura.

Una vez llegado a este punto, se tiene un elemento estructural fisurado en equilibrio sometido a cargas exteriores y a cargas en los labios de la fisura. En general, este sistema de cargas producirá una singularidad en el campo de tensiones en el fondo de la fisura, es decir, el factor de intensidad de tensiones no será nulo. Como el modelo pretende que las tensiones varíen de forma continua, al pasar del interior al exterior de la fisura, el paso siguiente consiste en anular el factor de intensidad de tensiones variando las cargas exteriores. Para el cálculo de  $K$  se usa una de las características de la versión elástica y lineal de FEFAP. En

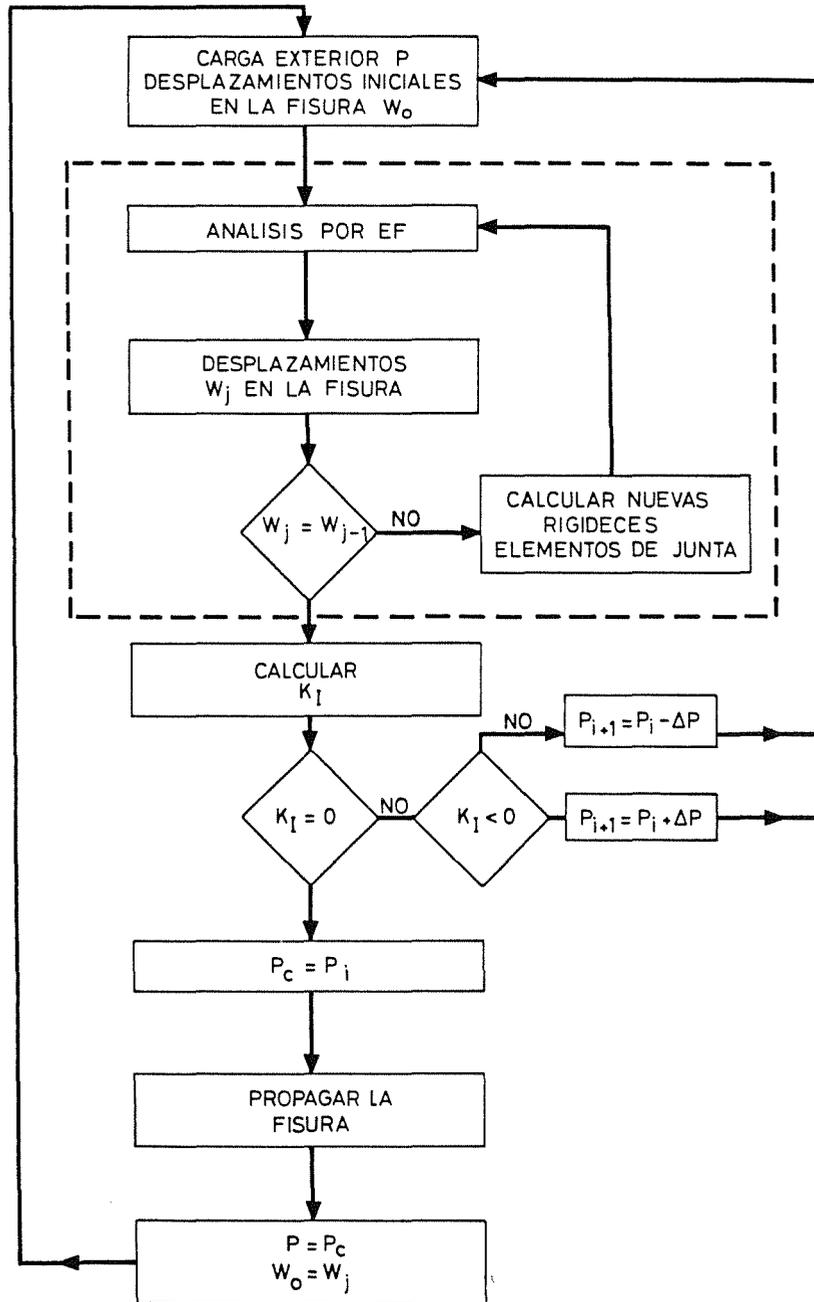


Figura 8.

esa versión, al propagar una fisura, el programa introduce automáticamente unos elementos finitos especiales que rodean el extremo de la fisura para calcular con precisión el factor

de intensidad de tensiones (Barsoum, 1976). En la versión no lineal de FEFAP se han mantenido dichos elementos que permiten conocer el valor de  $K_I$ . Si  $K_I < 0$ , se vuelve a repetir el proceso incrementando el valor de la carga exterior hasta que  $K_I$  es igual a 0.

Cuando se ha alcanzado esta carga se realiza una nueva propagación de la fisura. El incremento de longitud de la fisura es elegido por el usuario. En el caso de propagación en modo de apertura puro, la dirección de propagación viene definida a priori. En el caso de propagación en modo mixto, la dirección de la fisura es perpendicular a la tensión principal máxima de acuerdo con las hipótesis del modelo de fisura cohesiva. En la versión actual del programa pueden utilizarse si se desea otros criterios basados en un valor extremal de  $G$  (energía disponible en el fondo de la fisura) o en la densidad de energía para determinar la dirección de propagación (LLorca, Elices e Ingraffea, 1986).

Como ya se ha señalado al comentar las hipótesis básicas del modelo de fisura cohesiva, el problema de calcular la carga  $P_c$  para la que se produce la propagación de la fisura es un problema elástico con condiciones de contorno variables y tiene solución única.

#### 4.3 Implementación en un programa de elementos finitos

El ablandamiento del hormigón se modeliza utilizando unos elementos finitos de junta (Goodman, Taylor y Brekke, 1968). Estos elementos son isoparamétricos de 6 nudos por compatibilidad con el resto de los elementos utilizados por el programa (triángulos y rectángulos isoparamétricos de 6 y 8 nudos respectivamente). La formulación básica y el comportamiento de los elementos de junta se ha representado en la Figura 9. Cuando son sometidos a tracción presentan un ablandamiento normal y tangencial que depende de los valores de  $w$  y  $s$  a través de las rigideces secantes normal y tangencial  $K_N$  y  $K_T$ . La relación entre tensiones y desplazamientos en estos elementos (cuando están sometidos a tracción) viene expresada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N & K_{NT} \\ K_{TN} & K_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \end{bmatrix} \quad (14)$$

Las rigideces mixtas  $K_{NT}$  y  $K_{TN}$  permiten tener en cuenta la influencia de la apertura de la fisura en las tensiones tangenciales y la de los desplazamientos tangenciales en las tensiones normales respectivamente. Cuando  $w = w_c$ , su rigidez normal secante es nula al igual que para la rigidez tangencial secante cuando  $s = s_c$ .

Para poder utilizar estos elementos en un programa de elementos finitos es necesario obtener a partir de la ecuación (14) la matriz de rigidez del elemento que relaciona las cargas con los desplazamientos nodales. Una vez calculada esta matriz de rigidez, se ensambla en la matriz de rigidez de la estructura y resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los desplazamientos en los nudos.

El proceso iterativo seguido en estos elementos para llegar al equilibrio se basa en las rigideces secantes (Figura 9b). El dato inicial son los desplazamientos calculados en el paso anterior ( $w_0$ ). Con ellos se determinan la rigidez secante inicial  $K_{N_0}$ . Esta rigidez se utiliza para calcular los nuevos desplazamientos  $w_1$  en la fisura cohesiva. A partir de  $w_1$ , se obtiene la nueva rigidez secante  $K_{N_1}$  y el proceso se repite hasta lograr la convergencia. Este método no es rápido convergiendo aunque tiene la ventaja de que las modificaciones a realizar en un

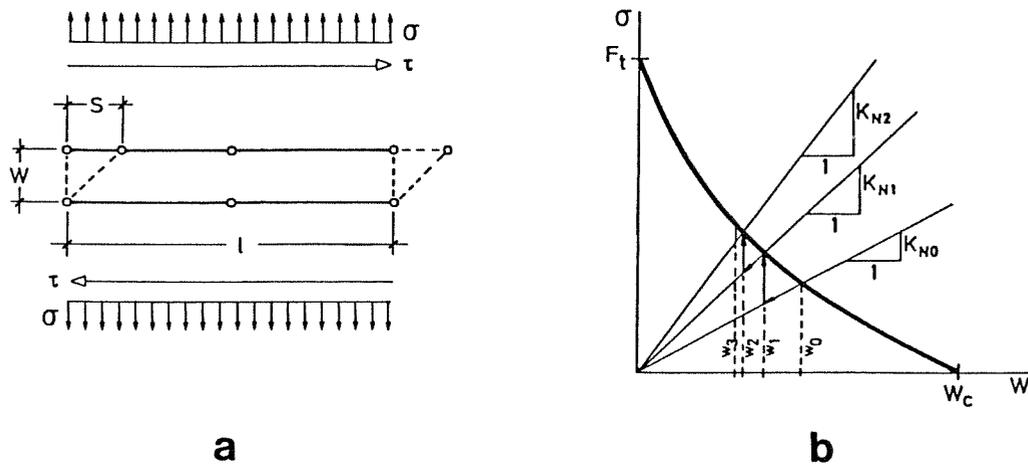


Figura 9.

programa general de elementos finitos son pequeñas. Además, este tipo de iteración impide que se produzca solapamiento entre los labios de la fisura porque al disminuir  $w$  aumenta la rigidez  $K_N$  del elemento de junta.

## 5. IMPLEMENTACION NUMERICA DEL MODELO DE BANDA COHESIVA

### 5.1. Introducción

Desarrollaremos en este apartado las bases para la implementación numérica de un modelo de banda cohesiva bidimensional, tipo (c,x,b), cuyo origen se debe a Rots (Rots y otros, 1985) partiendo de la descripción analítica hecha en el apartado 3.

Como se ha indicado, el modelo de banda cohesiva supone extendida la fisuración de forma uniforme en una banda cuyo ancho es una característica del material. La formulación de un código de cálculo necesitará, en consecuencia, incorporar la respuesta de dos zonas con distintas propiedades; la del material sano fuera de la banda y la del material dañado. También hará falta un criterio que permita evaluar cuándo y dónde aparece la zona dañada (banda de fisuración).

A la modelización de la zona sana no se le prestará especial atención, puesto que se supone elástica y lineal. En apartados sucesivos contemplaremos la modelización del inicio del dañado y del comportamiento de la zona fisurada. Para finalizar, señalaremos algunas características especiales del modelo de banda respecto de su implementación en un programa de elementos finitos, así como la forma en que se ha abordado su desarrollo.

### 5.2. Comportamiento del material en la zona dañada

Hasta producirse el daño, el material se supone isótropo con comportamiento elástico y lineal. Nuestro criterio de fisuración será imponer que la tensión principal máxima alcance el valor de la resistencia a tracción del hormigón,  $f_t$ . En ese instante se originará una banda de

fisuración normal a dicha tensión principal mayor, cuya orientación se mantendrá invariante a lo largo del proceso de cálculo.

No existe, como tal, criterio de localización. Allá donde se alcance  $f_t$  se producirá daño, formándose en consecuencia la banda de fisuración. La progresión de una banda fisurada en modo mixto es un problema complejo, debido a las dificultades de cálculo y a la falta de una teoría satisfactoria —como se ha mencionado antes—. Por estos motivos, en lo que sigue, trataremos sólo con sollicitación en modo I y supondremos conocidos el punto de origen y la dirección de propagación del daño.

El material al fisurarse se convierte en ortótropo y su comportamiento vendrá definido (conforme se expuso en el apartado 3), a través de la apertura del sistema de microfisuras, representado por el vector  $\mathbf{e}^c$  (desplazamiento de fisura por unidad de espesor de banda) y de la deformación del material entre las microfisuras supuesto elástico y lineal. Ambas contribuciones a la deformación las expresamos como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\theta + \boldsymbol{\varepsilon}^c \quad (7)$$

siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$  el tensor dado por la expresión (6) debido a las microfisuras y  $\boldsymbol{\varepsilon}^\theta$  el tensor de deformaciones elásticas del material sano entre microfisuras.

Resulta habitual, por su comodidad, utilizar una representación vectorial de las magnitudes tensoriales para su implementación numérica. De este modo con respecto a los ejes de la Figura 10, correspondientes a las direcciones normal y paralela a la fisuración, podemos establecer la relación para el caso bidimensional,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{nn}^\theta \\ \varepsilon_{tt}^\theta \\ \varepsilon_{nt}^\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{nn}^c \\ \varepsilon_{tt}^c \\ \varepsilon_{nt}^c \end{Bmatrix} \quad (15)$$

siendo  $\varepsilon_{ij}$  las componentes del tensor de deformación correspondiente en cada caso. Debemos hacer notar que, según (6),  $\varepsilon_{tt}^c = 0$  siempre, no existiendo contribución del sistema de microfisuras a la flexibilidad del material respecto de sollicitaciones paralelas a la dirección de fisuración.

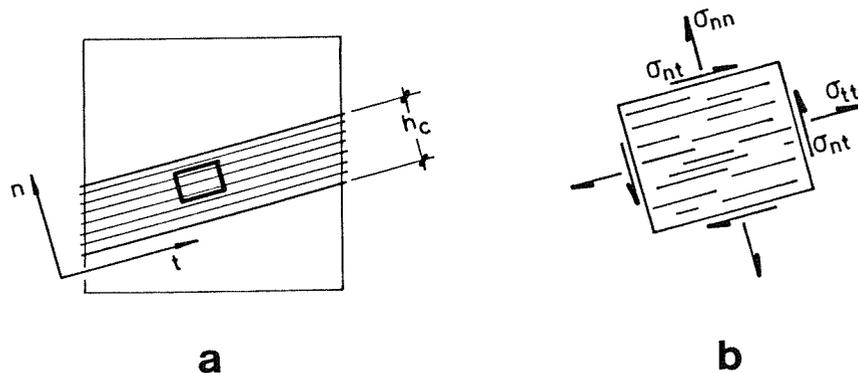


Figura 10.

Para el *material sano entre fisuras* se supone una relación elástica y lineal, transformándose, en nuestra representación matricial, la ecuación (8) en:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{nn}^\theta \\ \varepsilon_{tt}^\theta \\ \varepsilon_{nt}^\theta \end{Bmatrix} \quad (16)$$

siendo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

la matriz de rigidez elástica convencional, correspondiente al material sin dañar.

Para el *sistema de microfisuras* se postula una relación entre la tensión actuante, y los dos parámetros que representan su comportamiento  $\varepsilon_{nn}^c$  y  $\varepsilon_{nt}^c$  que se corresponden respectivamente con las dos componentes del vector  $\mathbf{e}^c$  según la dirección de la banda y su perpendicular ( $\varepsilon_{nn}^c \equiv e_n^c$ ;  $\varepsilon_{nt}^c \equiv e_t^c/2$ ). Dicha relación, dada en general por la ecuación (9), se simplifica notablemente suponiendo que no existe interacción entre componentes normales y tangenciales, quedando el problema desacoplado en las ecuaciones (12) y (13), que con la notación anterior se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \phi(\varepsilon_{nn}^c) && \text{curva de ablandamiento} \\ \sigma_{nt} &= 2G_c \varepsilon_{nt}^c \end{aligned} \quad (17)$$

siendo  $G_c = \beta E/2(1 + \nu)$  el módulo de rigidez transversal del sistema de microfisuras.

La curva de ablandamiento  $\phi(\varepsilon_{nn}^c)$ , cuya forma general se representó en la Figura 7, suele tomarse bilineal o exponencial, existiendo varias propuestas ya mencionadas (Petersson, 1981; Cornelissen, 1986). Señalemos que la correspondencia de estas curvas  $\phi(\varepsilon_{nn}^c)$  con las del modelo de fisura cohesiva se hace a través del ancho de banda ( $h_c$ ) según:

$$\phi(\varepsilon_{nn}^c) = f(w) = f(h_c \varepsilon_{nn}^c)$$

Resultado de todo lo anterior es que el comportamiento del material de la banda fisurada vendrá dado por el conjunto de ecuaciones (15), (16) y (17).

### 5.3. Proceso de cálculo

Las ecuaciones que dominan la respuesta del material son las (15), (16) y (17) para la zona fisurada, y la relación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

para el material sano, siendo  $\mathbf{D}$  la misma matriz de rigidez que la utilizada en la ecuación (16).

El problema no es lineal puesto que la primera de las relaciones (17) en general no lo será. Por ello hemos adoptado un procedimiento iterativo tangente, linealizando la expresión de la curva de ablandamiento:

$$\sigma_{nn} = \phi'(\varepsilon_{nn}^c) \Delta \varepsilon_{nn}^c \quad (19)$$

De este modo sustituimos dicha curva por su tangente, calculada en el punto correspondiente a la iteración anterior.

Tomando incrementos en las ecuaciones (15), (16), (17) y combinándolas entre sí podemos llegar a la expresión:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{nn} \\ \Delta \sigma_{tt} \\ \Delta \sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{nn} \\ \Delta \varepsilon_{tt} \\ \Delta \varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\Phi'(\varepsilon_{nn}^c)}{\Phi'(\varepsilon_{nn}^c) + D_{11}} & -\frac{D_{12}}{\Phi'(\varepsilon_{nn}^c) + D_{11}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2G_c}{2G_c + D_{33}} \end{bmatrix}$$

Además se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{nn}^c \\ \Delta \varepsilon_{nt}^c \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{D_{11}}{\Phi'(\varepsilon_{nn}^c) + D_{11}} & \frac{D_{12}}{\Phi'(\varepsilon_{nn}^c) + D_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_{33}}{2G_c + D_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{nn} \\ \Delta \varepsilon_{tt} \\ \Delta \varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Las ecuaciones (20) y (21) son la forma linealizada del comportamiento de la zona fisurada que usaremos en el cálculo.

Debido al ablandamiento presente en la ecuación (20) hemos optado por un proceso de cálculo en el que se utilice la matriz de rigidez tangente de la estructura. Este esquema obliga a un cambio continuo de la matriz de rigidez en cada iteración, actualizando los valores de  $\varepsilon_{nn}^c$  lo que aumenta el tiempo de cálculo. Como contrapartida, en los cálculos realizados hemos conseguido la convergencia en muy pocas iteraciones. El programa divide automáticamente la carga en cuantos escalones sean necesarios a fin de alcanzar paulatinamente el valor de  $f_t$  en los elementos que se fisuran y modificar en consecuencia las ecuaciones de los mismos. Hemos comprobado que el cambio de comportamiento del material al producirse la fisuración, pasando de ser elástico-lineal a presentar ablandamiento puede llevar a cálculos no convergentes si no se toma dicha precaución.

**5.4. Implementación en un programa de Elementos Finitos**

La implementación de un modelo de banda permite en principio predecir el origen y avance de la fisuración en una estructura cualquiera. Para ello y al tener que permanecer constante el ancho de la banda de fisuración, característico del material, el algoritmo de cálculo deberá obligar a que todos los elementos comprendidos en una banda de espesor  $h_c$  alrededor del punto donde alcancemos la resistencia a tracción se fisuren simultáneamente (Figura 11a). Por otra parte, en este supuesto, se deberá discretizar en forma suficiente la malla, ya que en otro caso aparecerían zonas con anchos netamente diferentes al característico, Figura 11b. Una forma de usar mallas no refinadas, señalada por Bazant (Bazant, 1986), consiste en modificar la respuesta del elemento donde se propaga la banda (Figura 11c). Las relaciones tensión deformación serían las de considerar dos materiales en serie conformando el elemento, el material sano exterior a la banda y el material en la banda.

Para evitar un algoritmo complejo, y facilitar la implementación en un programa de elementos finitos convencional, hemos optado por considerar sólo geometrías de carga con propagación conocida de la fisura, de modo que podamos situar a lo largo de dicha dirección elementos de ancho igual al de la banda de fisuración.

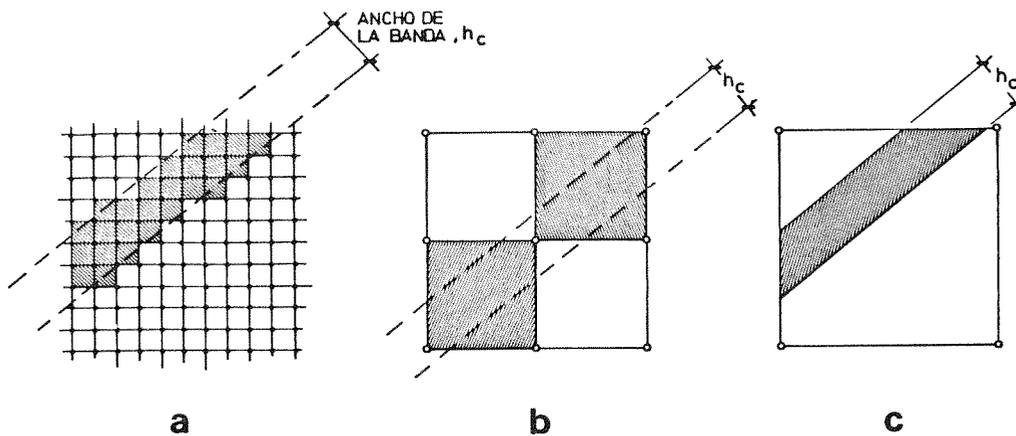


Figura 11.

Respecto del orden del elemento que se utilice, debemos tener en cuenta que conforme a las hipótesis del modelo el estado de deformación debe ser constante en el espesor de la banda. Por ello, el uso de elementos con un orden elevado no está recomendado, ya que las deformaciones tienden a concentrarse en una zona menor del elemento cuanto mayor es su orden (Figura 12), llegando en el límite a una concentración de deformaciones en una banda de espesor nulo, no existiendo disipación de energía. Según (11), al ser  $h_c = 0$  se obtendría  $G_F = 0$ .

Este inconveniente no se plantea si se hace uso de elementos de deformación constante (Figura 13a), aunque de esta manera se vuelve a estar en la necesidad de incluir en el

programa la condición de fisurar simultáneamente los elementos comprendidos en el ancho de la banda (Figura 13b).

En consecuencia, planteamos como solución de compromiso utilizar elementos isoparamétricos de cuatro y ocho nodos y cuatro puntos de Gauss por elemento, que han mostrado un buen comportamiento en los cálculos que hemos realizado.

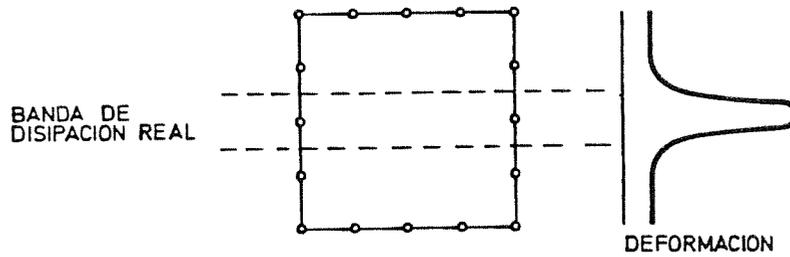


Figura 12.

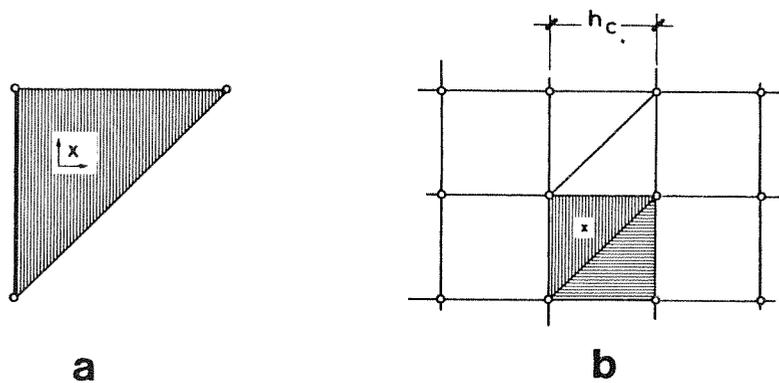


Figura 13.

## 6. EJEMPLO

### 6.1. Resultados experimentales

Para contrastar los resultados numéricos de los distintos modelos se han realizado en el laboratorio ensayos con vigas entalladas sometidas a flexión en tres puntos (Planas y Elices, 1985). La serie de ensayos corresponde a un conjunto de tres geometrías con diferentes relaciones longitud/canto. El hormigón utilizado tenía un tamaño máximo de árido de 20 mm y la relación agua/cemento utilizada fue 0.54. La dosificación se realizó de acuerdo

Amasada	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$E$ (GPa)
1	37.3	3.10	24.3
2	32.8	2.75	21.5
3	37.8	3.08	23.4
4	36.8	3.23	26.6

TABLA I. Propiedades mecánicas de las distintas amasadas

con las recomendaciones de la RILEM (1974). Se hicieron cuatro amasadas distintas y las características mecánicas de cada una de ellas a los 28 días se muestran en la Tabla 1.

Las vigas fueron hormigonadas a partir de las 4 amasadas y sometidas a un ensayo de flexotracción estable con control de desplazamiento en el centro de la luz. Como resultado de los ensayos se obtuvo la curva carga-desplazamiento, medidos ambos en el centro de la luz. A partir de esta curva se calculó la energía de fractura  $G_{FE}$ . Los valores de  $G_{FE}$  para los tres tamaños ensayados se han resumido en la Tabla 2.

Probeta	$G_{FE}$ (valor medio)	$G_{FE}$ (desviación estandar)
FE1 - 1	123	22
FE1 - 2	125	30
FE1 - 3	126	28

TABLA II. Energía de fractura,  $G_{FE}$  para varios tamaños (N/m).

Como puede observarse, la energía de fractura es independiente del tamaño de la viga y parece ser una propiedad del material de acuerdo con las hipótesis de los modelos propuestos.

## 6.2. Modelo de fisura cohesiva

Se ha utilizado la versión no lineal de FEFAP para reproducir los resultados experimentales. Para efectuar los cálculos, se tomaron como características de los materiales los valores experimentales medios indicados en la Tabla 3.

Módulo de Elasticidad $E$	23.95 GPa
Resistencia a Tracción $f_t$	3.04 MPa
Energía de Fractura $G_F$	125 N/m
Coefficiente de Poisson $\nu$	0.2

TABLA III. Valores utilizados en el modelo de fisura cohesiva.

El diagrama de ablandamiento utilizado fue bilineal, siguiendo los resultados de Petersson (1981). El área encerrada bajo la curva  $\sigma - w$  corresponde a la energía de fractura  $G_F$  (se ha supuesto  $G_{FE} = G_F$ , siguiendo la notación indicada al comienzo de este artículo). Debido a la simetría del problema, se conoce la dirección de propagación de la fisura y no se transmiten esfuerzos cortantes ( $K_T, K_{NT}$  y  $K_{TN} = 0$ ).

### III - Fractura Cohesiva

Las tres mallas iniciales de elementos finitos son semejantes, incrementándose el número de elementos en la zona de propagación de la fisura a medida que aumentaba el canto de la viga (Figura 15a). Al propagarse la fisura, el programa va realizando las modificaciones de la topología y, al final del proceso, la malla es mucho más fina en la zona de propagación, como puede verse en las Figuras 14b y 14c que corresponden al ensayo FE1-2.

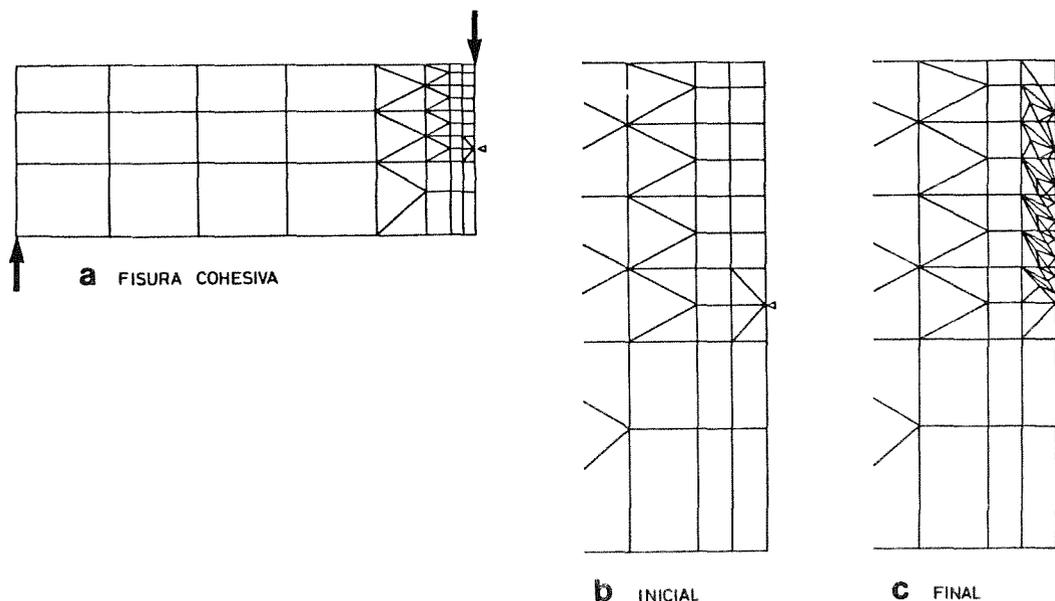


Figura 14.

En la Figura 15 se han recogido los resultados numéricos de la curva carga-desplazamiento según el modelo de la fisura cohesiva para cada uno de los tres tamaños estudiados junto con la zona de dispersión experimental obtenida con los ensayos en el laboratorio. Como se puede observar, las predicciones numéricas se ajustan bastante bien a los resultados experimentales.

En la Figura 16 se han representado las distribuciones de tensiones normales sobre la fisura para el caso FE1-2. La primera corresponde a la situación de carga máxima ( $P = 27$  kN y  $a = 14.13$  cm) y la segunda a un punto cercano a la rotura total de la viga ( $P = 8$  kN y  $a = 18.57$  cm). Para el tamaño estudiado ( $d = 20$  cm), la distribución de tensiones sobre la fisura para carga máxima sólo depende de la pendiente inicial de la curva de ablandamiento del material y no de la energía de fractura  $G_F$ . Para tamaños de un orden de magnitud superior, se puede observar que influyen ambos factores. Sin embargo, la zona descendente de la curva carga-desplazamiento sí viene determinada por la energía de fractura aún para los tamaños aquí estudiados (Alvaredo y Torrent, 1987).

Para modelizar adecuadamente la zona de fractura, se ha procurado utilizar un número elevado de elementos finitos sobre la fisura. Los resultados de la Figura 16 muestran que los mayores gradientes de tensiones se producen junto al extremo de la fisura mientras que

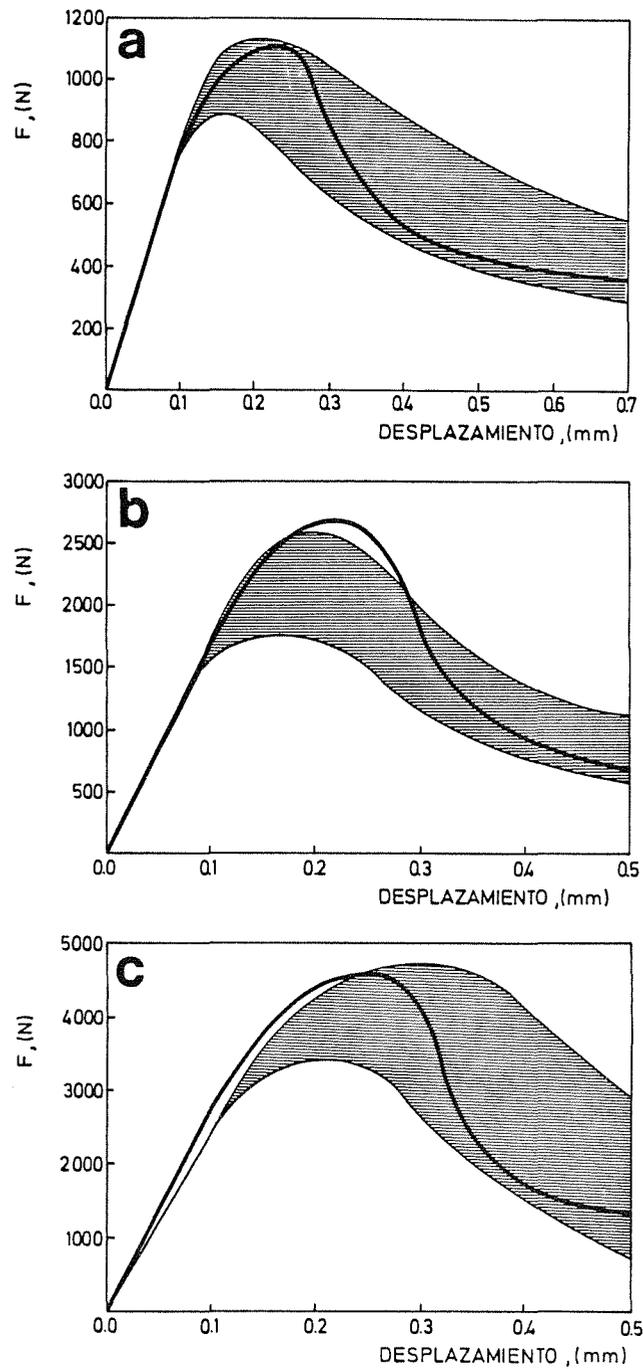


Figura 15.

las variaciones de la tensión sobre la fisura son bastante suaves. Por lo tanto, para resolver

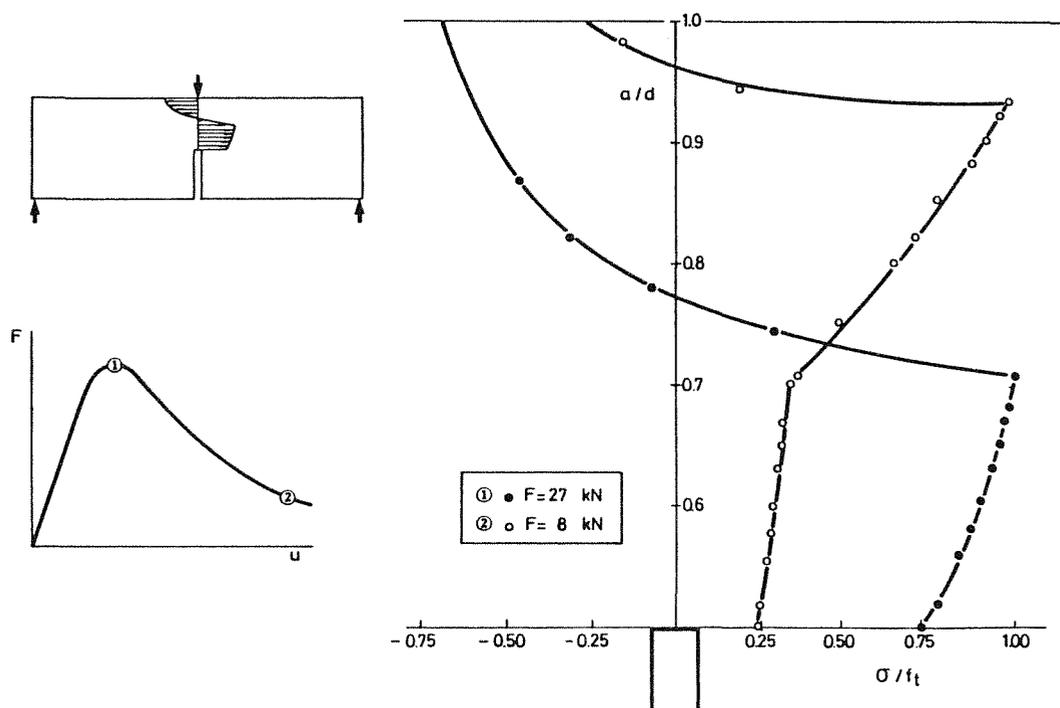


Figura 16.

adecuadamente este problema es necesario utilizar una malla muy refinada junto al extremo de la fisura o bien utilizar elementos finitos singulares que permitan representar los fuertes gradientes.

### 6.3 Modelo de banda cohesiva

A través de un modelo de banda cohesiva, implementado en un programa convencional de elementos finitos, hemos abordado el cálculo para las vigas entalladas descritas en el apartado primero de este capítulo. Las características del material, utilizadas como parámetros en el cálculo, son las indicadas en la Tabla 3. La zona dañada se ha modelizado a través de una curva de ablandamiento bilineal, debida a Petersson, tal y como se ha hecho para el cálculo basado en la fisura cohesiva pero modificándola según lo expresado en la ecuación (10). Para el valor del factor de retención en cortante,  $\beta$ , se ha tomado 0,001. El ancho de la banda de fisuración,  $h_c$ , se ha hecho igual a 20 mm.

En la Figura 17 se presentan la malla utilizada y los resultados para la viga FE1-2. Se han considerado elementos isoparamétricos de ocho nodos y cuatro puntos de Gauss, cuyo ancho en la zona de la entalla se hizo igual al de la banda de fisuración.

Los resultados del cálculo muestran un buen acuerdo con los datos experimentales, teniendo en cuenta la discretización tan somera realizada con cuatro elementos en la zona

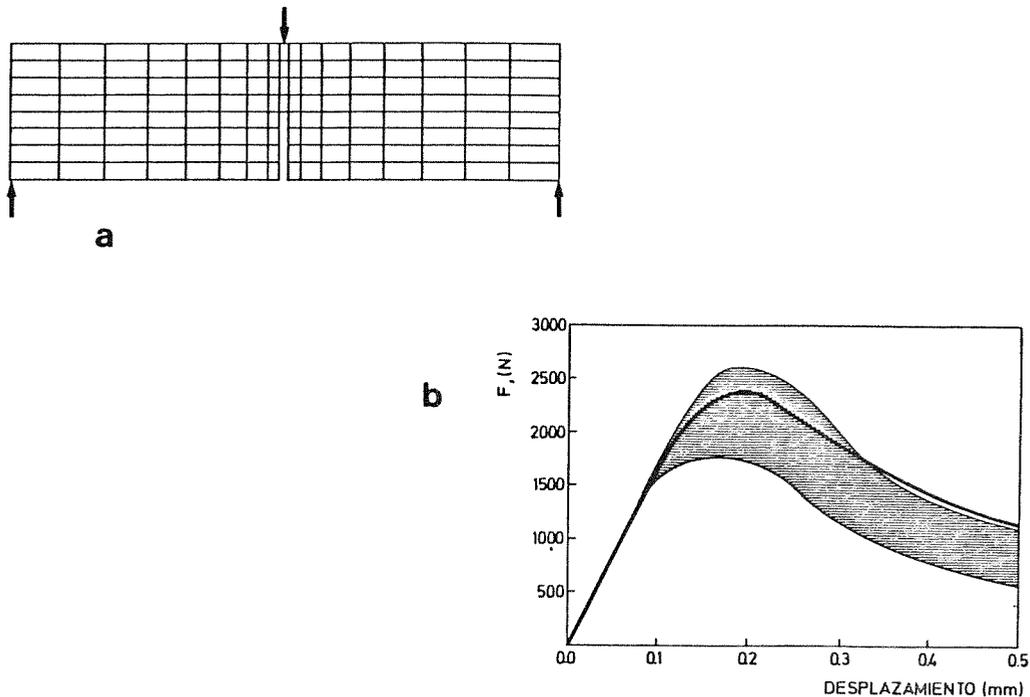


Figura 17.

de la entalla. Los valores algo superiores en la zona de mayores desplazamientos del diagrama pueden deberse al falso incremento de la rigidez que proporciona utilizar pocos elementos en la entalla.

La utilización de un modelo de banda permite un rápido estudio de las geometrías de interés, prediciendo un valor correcto de la carga máxima con el empleo de mallas sencillas. Cuando se desee conocer el comportamiento en la “cola” del diagrama será necesario recurrir a mallas más complejas.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado gracias a la ayuda de la CICYT, proyecto PB86-0494.

#### REFERENCIAS

- . Alvaredo, A. M. y Torrent, R. J., “The Effect of the Shape of the Strain-Softening Diagram on the Bearing Capacity of Concrete Beams”, *Materials and Structures*, Vol. **20**, pp. 448-454, (1987).
- . Barenblatt, G.I., “The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture”, *Advances in Appl. Mech.*, Vol. **7**, pp. 55-129, (1962).

- . Barsoum, R.S., "On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Elastic Fracture Mechanics". *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. **10**, pp. 25-37, (1976).
- . Bazant, Z.P. y Cedolin, L., "Blunt Crack Band Propagation in Finite Element Analysis", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **105**, No. EM2, pp. 297-315, (1979).
- . Bazant, Z.P. y Oh, B.H., "Crack Band Theory for Fracture of Concrete", *Materials and Structures*, Vol. **16**, pp. 155-177, (1983).
- . Bazant, Z.P., "Mechanics of Distributed Cracking", *Applied Mechanics Rev.*, Vol. **39**, No. 5, pp. 675-705, (1986).
- . Carpinteri, A., Colombo, G., Ferrara, G. y Giuseppetti, G., "Numerical Simulation of Concrete Fracture Through a Bilinear Softening Stress-Crack Opening Displacement Law", *Int. Conf. Fracture of Concrete and Rock. Houston*, EE.UU., pp. 178-191, (1987).
- . Cornelissen, H.A.W., Hordijk, D.A. y Reinhardt, H.W., "Experimental Determination of Crack Softening Characteristics of Normal Weight and Lightweight Concrete", *Heron*, Vol. **31**, No. 2, pp. 45-56, (1986).
- . Dugdale, D.S., "Yielding of Steel Sheets Containing Slits", *J. Mech. Phys. Sol.*, Vol. **8**, pp. 100-108, (1960).
- . Elices, M., *Mecánica de la Fractura*, E.T.S. Ing. Caminos. UPM., (1985).
- . Elices, M., LLorca, J. e Ingrassia, A.R., "Fractura del Hormigón en Régimen Elástico y Lineal. Un Ejemplo: La Presa de Fontana", *Informes de la Construcción*, Vol. **37**, pp. 19-33, (1985).
- . Elices, M. y Planas, J., "Material Models for Concrete", Capítulo 3 del libro *Fracture Mechanics of Concrete: Applications*, en vías de publicación, RILEM,(1988).
- . Goodman, R.E., Taylor, R.L. y Brekke, T.L., "A Model for the Mechanics of Jointed Rock", ASCE, *J. Civil Engineering*, Vol. **94**(5), SM (3), pp. 637-659, (1968).
- . Hillerborg, A., Modeer, M. y Petersson, P.E., "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. **6**, pp. 773-782, (1976).
- . Hillerborg, A., "Numerical Methods to Simulate Softening and Fracture of Concrete", *Fracture Mechanics of Concrete*. Martinus Nijhoff Publ., pp. 141-170, (1985).
- . LLorca, J., Elices, M. e Ingrassia, A.R., "Propagación de Fisuras en Hormigón", II Symposium sobre Aplicaciones del Método de Elementos Finitos en Ingeniería, Barcelona, (1986).
- . LLorca, J., Elices, M. e Ingrassia, A.R., "Análisis Lineal y no Lineal de Propagación de Fisuras en Hormigón", *Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **3**, pp. 309-333, (1986).
- . Petersson, P.E., "Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials", *Report TVBM-1006*, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, (1981).
- . Planas, J. y Elices, M., "Fractura del Hormigón en Régimen No Lineal. Intentos para Medir la Energía de Fractura  $G_F$ ", *Informes de la Construcción*, Vol. **37**, pp. 35-52, (1985).
- . Planas, J. y Elices, M., "Towards a Measure of  $G_F$ : An Analysis of Experimental Results", *Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete*, pp. 269-278, Lausanne, Suiza, (1986).
- . Reinhardt, H.W., "Fracture Mechanics of an Elastic Softening Material like Concrete".

- Heron, Vol. **29**, No. 2, pp. 3-42, (1984).
- . Rice, J.R., "Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture", Capítulo 3 del libro "Fracture", (H. Liebowitz, Ed.), Academic Press, (1968).
  - . RILEM, "*Materials and Structures*", Vol. **39**, pp. 207-224, (1974).
  - . RILEM, Comité 50-FMC, "Determination of the Fracture Energy of Mortar and Concrete by Means of Three-Point Bend Tests on Notched Beams", *Materials and Structures*, Vol. **18**, No. 106, pp. 285-290, (1985).
  - . Rots, J.G., Nauta, P., Kusters, G., Blaauwendraad, J., "Smearred Crack Approach and Fracture Localization in Concrete", Heron, Vol.**30**(1), pp. 1-48, (1985).
  - . Saouma, V., "Interactive Finite Element Analysis of Reinforced Concrete. A Fracture Mechanics Approach.", Ph. D. Thesis, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, (1985).
  - . Wawrzynek, P.A. e Ingraffea, A.R., "Interactive Finite Element Analysis of Fracture Processes: An Integrated Approach.", *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. **8**, pp. 137-150, (1987).

# *IV - Fractura por Fatiga*

## METODOS NUMERICOS EN FATIGA

JAIME DOMINGUEZ

*E.T.S. Ingenieros Industriales  
Universidad de Sevilla.*

### 1. INTRODUCCION

El fenómeno de la fatiga comienza a producirse por la deformación plástica cíclica o irregular en el tiempo, que se presenta en un elemento mecánico como respuesta a una carga que varía también de una forma cíclica o irregular. Normalmente, el proceso comienza en las zonas con mayor nivel de tensión del elemento, ya sean zonas próximas a puntos de aplicación de la carga, etc.

Inicialmente, la deformación plástica cíclica se manifiesta en forma de líneas y bandas de deslizamiento en los granos, siendo más numerosas en aquellos sometidos a mayores niveles de tensión. Las bandas de deslizamiento son focos de microgrietas de longitud igual o inferior al tamaño del grano del material en que se producen. La orientación de éstas es la misma que la de las líneas de deslizamiento, que, a su vez, es la de aquellos planos atómicos que, permitiendo el deslizamiento, forman el menor ángulo con la dirección de las tensiones tangenciales máximas.

Las microgrietas van aumentando su magnitud ante las cargas repetidas. Cuando una de ellas llega al borde de grano, éste hace de barrera, produciendo una disminución de la velocidad de crecimiento, una parada momentánea, o una detención definitiva que impide la propagación posterior de la grieta. Las que continúan creciendo en el grano siguiente, lo hacen con una nueva orientación igual a la de alguno de los planos de este grano con mayor propensión al deslizamiento. El proceso continúa a través de granos sucesivos, llegando un momento en que la grieta tiende a cambiar su orientación, continuando su crecimiento perpendicularmente a la tensión principal máxima. El avance continúa hasta que alcanza una longitud suficiente para producir la fractura completa o la plastificación global de la sección neta del elemento, dependiendo del material y geometría, de forma que hace imposible su funcionamiento.

Tradicionalmente, a efectos de cálculo, se ha dividido el proceso de fatiga en dos fases, nucleación y propagación, utilizándose distintos procedimientos para el cálculo de la duración de una y otra fase. En cualquiera de las dos juega un papel fundamental la deformación

plástica producida durante los períodos de carga y descarga, en cada ciclo. La primera fase se considera controlada por la deformación plástica local de la zona donde aparece la grieta. En la fase de propagación, el proceso está controlado por el estado de tensiones y deformaciones en el borde de la grieta. Si es aplicable la mecánica de la fractura elástica lineal (MFEL), dicho estado podrá caracterizarse mediante el factor de intensidad de tensiones ( $K$ ). Si ésta no es aplicable, y hay una zona plástica de suficiente tamaño en el entorno del borde, el estado y el crecimiento deberán caracterizarse por otro parámetro, por ejemplo, la integral  $J$ , el desplazamiento de apertura de grieta (COD), etc.

Un inconveniente de esta división del proceso en fases es la dificultad para establecer los límites entre una y otra de forma clara. No existe una definición precisa del instante en que termina la fase de nucleación y comienza la de propagación. Unas veces se emplea como valor de separación una longitud de grieta previamente definida<sup>1</sup>; otras, la longitud mínima que permite asumir las hipótesis de la MFEL<sup>2</sup>; también, en casos de grietas emanando de una entalla, cuando llegan al límite de la zona de influencia de ésta<sup>3</sup>; etc.

En cualquier caso, tanto en una fase como en otra, es necesario conocer la evolución de las tensiones y, sobre todo, de las deformaciones en la zona de interés durante el proceso. Para ello, habrá que emplear alguno de los métodos de determinación de estos parámetros, bien sean analíticos, numéricos o experimentales. Dada la limitada aplicación de los analíticos a geometrías y cargas muy simples, excepto en casos muy concretos, solo se usan los experimentales y los numéricos. Entre estos últimos cabe destacar principalmente el método de los elementos finitos (MEF) y, en menor medida, el de los elementos de contorno (MEC). Teniendo en cuenta el importante papel que desempeñan las deformaciones plásticas, estos métodos deben considerar comportamiento elastoplástico. Tanto con uno como con otro método, hay que tener en cuenta ciertas particularidades del proceso de fatiga que hacen su aplicación algo distinta de la usual estática.

En el caso de análisis de tensiones y deformaciones en entallas, habrá que tener en cuenta el carácter variable de la carga, lo que lleva a usar como curva tensión-deformación la ley de comportamiento cíclico, que puede ser bastante distinta de la obtenida en el ensayo estático. Otra posible diferencia con los métodos normales es que esta curva de comportamiento puede variar con el número de ciclos, con lo que en determinados casos podría ser necesario considerar la modificación del comportamiento durante el proceso de carga. El hecho de que la amplitud de la carga pueda variar también introduce particularidades en el tratamiento del problema. En ocasiones será necesario realizar la simulación del proceso ciclo a ciclo para poder reproducir la evolución de las tensiones y deformaciones.

En el estudio del crecimiento de grietas por fatiga es importante conocer la evolución de un parámetro que afecta enormemente al crecimiento, como es la tensión de cierre de la grieta ( $S_{cl}$ ). Esta, se define como el valor nominal de la tensión para el que comienzan a hacer contacto las caras de la grieta durante el período de descarga del ciclo. Puede determinarse experimentalmente, midiéndola durante el proceso de fatiga, analítica o numéricamente. Aunque la experimentación es fundamental en este caso, los métodos numéricos y analíticos prestan una ayuda importante. Existen diversas aproximaciones analíticas a las tensiones de cierre<sup>4</sup>. Sin embargo, éstas son solo para casos de comportamiento elasto-plástico ideal y carga cíclica de amplitud constante, por lo que sólo permiten aproximar casos simples con soluciones estables en el tiempo.

El análisis numérico de las tensiones de cierre pasa por la realización de una simulación del crecimiento de la grieta con el número de ciclos. En ésta debe intentarse reproducir el comportamiento elasto-plástico del material en el borde de la misma a lo largo de cada ciclo, y aproximar en alguna medida el proceso físico del crecimiento. La representación de éste debe hacerse rompiendo de alguna forma la continuidad del material en cada ciclo, permitiendo así que crezca la grieta. Además de las peculiaridades reseñadas, deben añadirse las indicadas para el análisis del comportamiento de las entallas, que también son aplicables en el análisis del crecimiento.

Dado el costo de tiempo de la simulación de cualquiera de las dos fases del proceso de fatiga, sobre todo cuando la carga no es de amplitud constante, se emplean con gran frecuencia otros métodos numéricos más simples e inexactos que los previamente indicados, pero mucho más rápidos. Otras veces, en el caso del período de iniciación, a partir de resultados experimentales o de soluciones estáticas mediante elementos finitos, se hacen extrapolaciones al caso de cargas variables en amplitud. Estos métodos son menos aproximados, pero, a la vista de los tiempos de cálculo actuales, en muchos casos son los únicos aplicables.

A continuación se van a describir brevemente las particularidades de la aplicación del MEF a la iniciación y al crecimiento, y se describirán algunos otros métodos de simulación del proceso, menos aproximados pero más rápidos.

## 2. INICIACION

Existen nuevas tendencias que intentan unificar el cálculo de la vida a fatiga, considerando un solo modelo para las dos fases. Si el proceso de fatiga es solo uno, el daño producido debe poder modelarse mediante una única aproximación. Sin embargo, el mejor procedimiento existente actualmente sigue siendo aquel que analiza el proceso suponiéndolo dividido en dos fases: iniciación y propagación de la grieta.

La duración del período de iniciación se determina mediante el método de las deformaciones locales<sup>5</sup>. Dicho procedimiento se basa en las curvas de Manson-Coffin (Figura 1). Estas curvas representan el número de ciclos ( $N$ ) —o de inversiones ( $2N$ )— de amplitud constante, necesarios para que se inicie una grieta en un punto, en función de las deformaciones producidas ( $\epsilon$ ). Estas suelen considerarse divididas en sus componentes elásticas ( $\epsilon_e$ ) y plásticas ( $\epsilon_p$ ). Pueden definirse mediante la ecuación:

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon_e}{2} + \frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c \quad (1)$$

donde  $\sigma'_f$ ,  $\epsilon'_f$ ,  $b$  y  $c$  son constantes a determinar mediante ensayos que, normalmente, se realizan sometiendo a tracción-compresión a una probeta prismática o cilíndrica lisa.  $\Delta\epsilon$  es el incremento de deformación entre un pico y un valle (rango) de los ciclos.

En su aplicación, se considera que la duración del período de iniciación en una entalla sometida a unas cargas determinadas será igual a la de una probeta lisa sometida a la misma historia de deformaciones que el borde de la entalla considerada (Figura 2). Conocidos los datos experimentales de resistencia de las probetas, la extrapolación de estos resultados

IV - Fractura por Fatiga

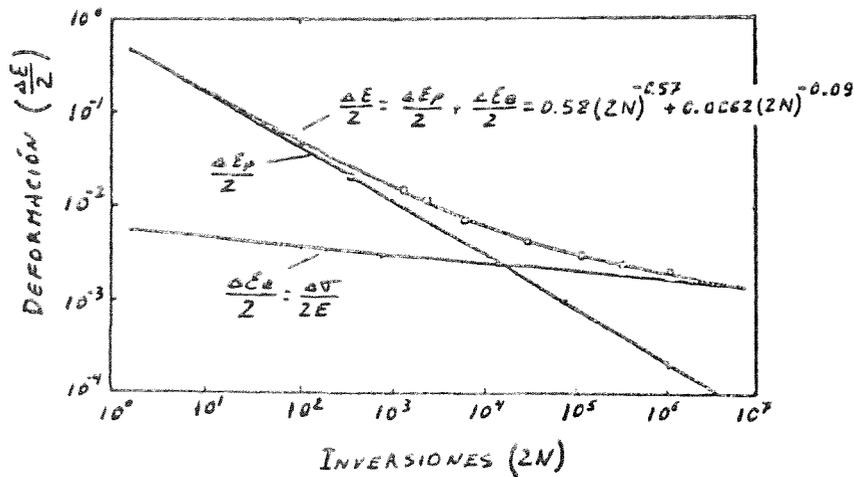


Figura 1. Curva  $\frac{\Delta \epsilon}{2} - 2N$  para el acero AISI 4340, recocido.

podrá hacerse determinando la historia de deformaciones producidas en la entalla. Excepto en casos de geometrías muy simples, la mejor aproximación se obtiene con los métodos numéricos generales de análisis. De ellos, con mucha diferencia, el más empleado es el de los elementos finitos.

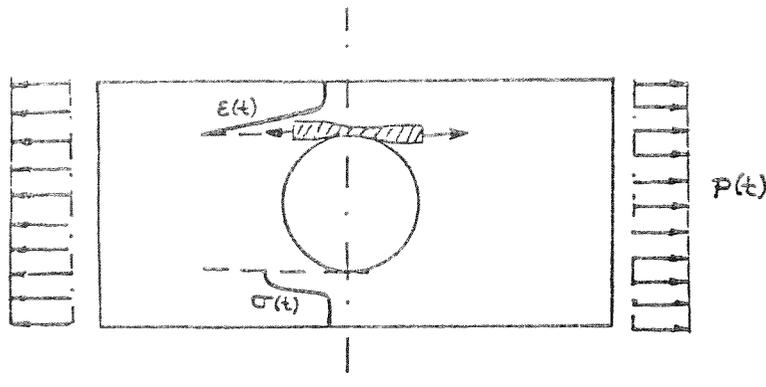


Figura 2. Iguales efectos de iniciación en el borde del taladro y en la probeta.

En general, para la aplicación del método, las consideraciones a realizar serán prácticamente las mismas que en cualquier caso de análisis elasto-plástico en concentradores de tensión, pero con ciertas particularidades.

Los parámetros a considerar para decidir los tipos de elemento más convenientes para estas aplicaciones son los usuales, teniendo en cuenta los gradientes de tensión y deformación que se producirán. Lo más frecuente es emplear elementos con deformación constante, aunque ello exige un número mayor de ellos. En la Figura 3 se muestran tres ejemplos de discretización: uno (Figura 3a.) de un caso axi-simétrico con elementos constantes<sup>6</sup>;

otro (Figura 3b), una probeta "compact" con elementos triangulares lineales (los cuadrados representan grupos de cuatro triángulos)<sup>7</sup>; y el tercero (Figura 3c), una placa con un agujero en el centro, discretizada con elementos isoparamétricos de 8 nodos<sup>8</sup>. Dada la relación entre deformaciones y número de ciclos de vida de iniciación, la precisión en los cálculos puede ser importante, ya que un 10% de error en las deformaciones calculadas puede representar un 100% de error en la vida.

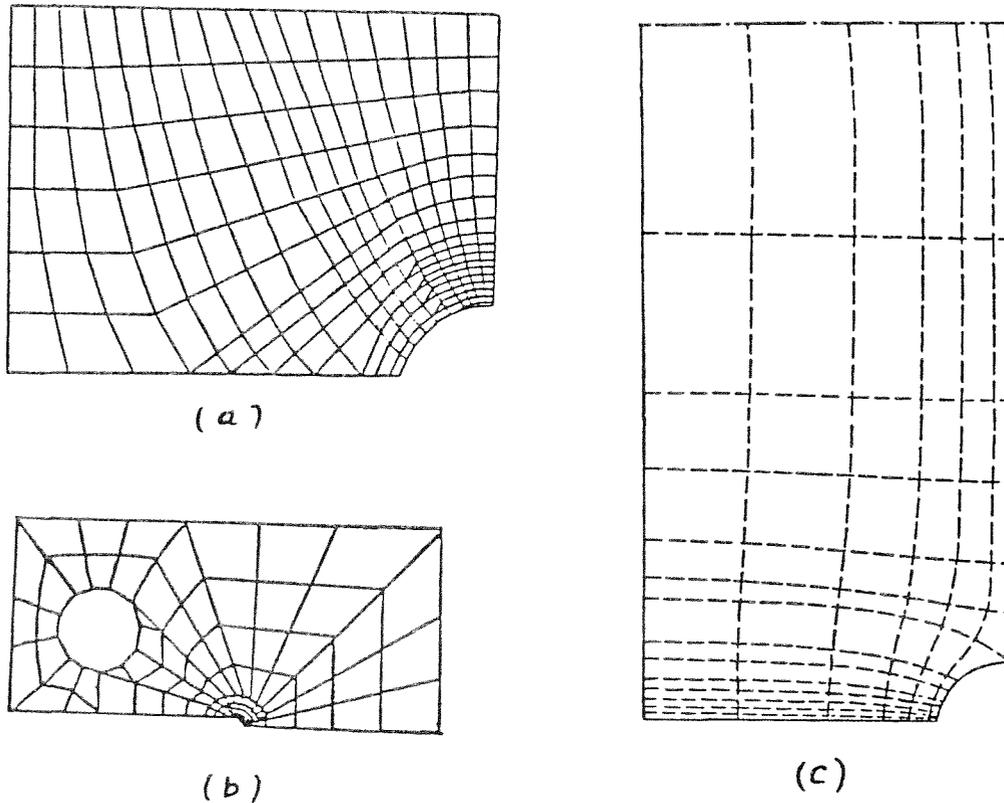


Figura 3. Ejemplos de discretización

El método de cálculo debe ser incremental paso a paso, ya que las deformaciones en cualquier instante dependerán de la historia de carga, además de la aplicada en cada momento. En metales suele considerarse una superficie de fluencia de von Mises, con endurecimiento cinemático de acuerdo con el modelo de Prager-Ziegler. Este endurecimiento permite la simulación del efecto Bauschinger y aproxima con bastante fidelidad la variación de tensiones y deformaciones del material en comportamiento estable, ante cargas repetidas de igual magnitud.

Dado el tipo de carga, como ley de comportamiento deberá considerarse la curva cíclica  $\sigma - \epsilon$ . Esta, dependiendo del material, puede ser muy distinta o parecida a la del ensayo estático (Figura 4). Se puede definir como el lugar geométrico de los picos de los lazos de histéresis producidos en el material durante la aplicación de grupos de ciclos de carga de

distinta amplitud a probetas lisas<sup>9</sup>. A partir de ella puede representarse la ecuación de las ramas de los lazos de histéresis y, con cierta aproximación, el comportamiento ante cargas de variación irregular.

En realidad, el comportamiento del material no suele ser estable desde el principio del proceso de carga. Cuando una probeta de material metálico se somete a un proceso de carga repetida de determinada magnitud, el nivel de los incrementos de deformación va variando, bien sea disminuyendo o aumentando, con el número de ciclos (Figura 5). Después de un número determinado de ellos, el comportamiento tiende a ser estable, pudiéndose representar mediante la curva antes mencionada.

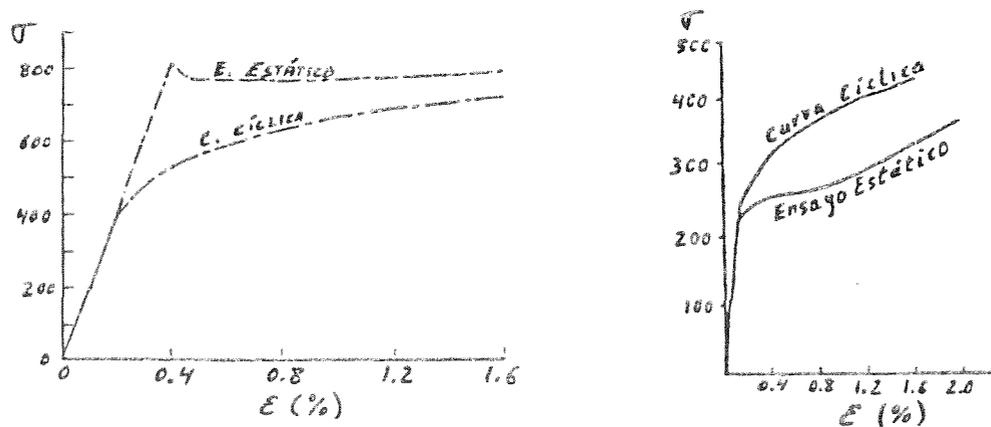


Figura 4. Curvas  $\sigma - \epsilon$  para los aceros: (a) RQC-100<sup>10</sup>; y (b) 2 1/4 - I Mo<sup>6</sup>

Este proceso de variación del nivel de deformaciones para un nivel constante de la amplitud de las tensiones es lo que se denomina endurecimiento o ablandamiento cíclico, dependiendo de que las deformaciones disminuyan o aumenten, respectivamente. El número de ciclos necesarios para alcanzar la estabilización del comportamiento depende del material. Normalmente es necesario un número no mayor del 10% del necesario para que finalice el período de iniciación, aunque a veces es necesario el 50%. Otras, nunca llega a estabilizarse el comportamiento.

El empleo de la curva cíclica implica considerar comportamiento estable desde el principio. Cuando la carga es de amplitud constante, los errores introducidos por esta suposición suelen ser pequeños. Sólo si la estabilización tarda en producirse, éstos pueden alcanzar cierta importancia.

Si, además de ser constante la amplitud, los ciclos son simétricos, la aplicación del método de forma general sólo exigirá la solución del problema elasto-plástico de la carga inicial desde cero, considerando una relación  $\sigma - \epsilon$  del tipo:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{1/n'} \quad (2)$$

que es la ecuación de la curva de comportamiento cíclico. Una vez alcanzado el máximo del primer ciclo, se sigue el proceso, pero con incrementos negativos de la carga y cambiando

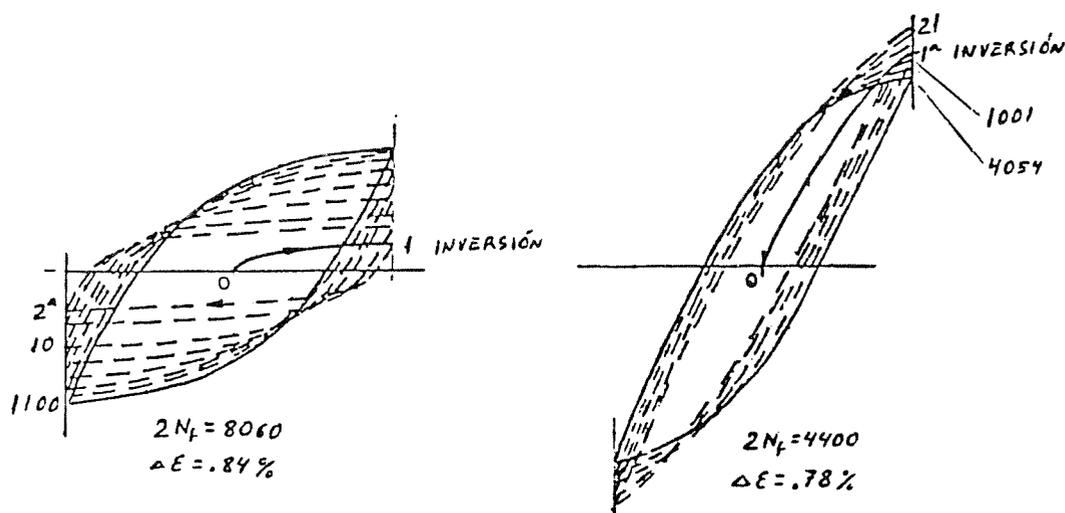


Figura 5. Ejemplos de endurecimiento (a) y ablandamiento (b) cíclico.

la ley de comportamiento. Esta debe ser la que simula las ramas de los lazos de histéresis, que en carga dará valores positivos de  $\Delta \epsilon$  y de  $\Delta \sigma$ , y en descarga, como es este caso, serán negativos. La ecuación que representa este comportamiento es:

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\Delta \sigma}{2E} + \left( \frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{1/n'} \quad (3)$$

Donde  $\Delta \epsilon$  e  $\Delta \sigma$  son los incrementos producidos desde el punto de variación del signo de la carga. El proceso deberá seguirse varios ciclos con la misma relación  $\Delta \sigma - \Delta \epsilon$ , hasta que pueda considerarse estabilizado el comportamiento en cada ciclo.

Obtenidos los valores de las deformaciones producidas, sólo habrá que determinar en la curva  $\Delta \epsilon - 2N$  del material la vida de nucleación. El tiempo necesario para la obtención de las deformaciones es equivalente al de solución de un número de casos de análisis elasto-plástico igual al número de semiciclos que deben resolverse hasta la práctica estabilización del proceso.

Si los ciclos no son de tensión media nula, es importante la elección de la ley de comportamiento para la primera carga. De ella va a depender el valor de las tensiones locales medias obtenidas, que influyen en el valor de la vida de nucleación calculada, especialmente cuando el nivel de deformaciones es bajo. Un problema adicional que se presenta en estos casos es la simulación de la relajación de la tensión media con el número de ciclos. Normalmente, si las deformaciones son importantes se desprecia el efecto de esta tensión media, ya que al cabo de pocos ciclos se habrá relajado en las zonas con mayor nivel de deformaciones, que son las importantes a efecto de fatiga. Tampoco se considera la redistribución de tensiones que se producirá por esta relajación, que normalmente será despreciable. Si las deformaciones son pequeñas, se suele asumir que no hay relajación durante los ciclos de carga, lo que es desfavorable a efectos de fatiga.

Cuando las cargas varían de forma irregular, esto es, cuando cada ciclo puede ser distinto del anterior, se presentan algunos problemas adicionales. Uno de ellos es que la relación  $\Delta\sigma - \Delta\varepsilon$  nunca llega a ser estable. Dada la práctica imposibilidad de determinar la evolución exacta de la relación indicada al cargar un sistema irregularmente, se considera que el material sigue la misma ley que en caso de comportamiento estable. Otro inconveniente, más importante, es que la única forma de simular la evolución de las deformaciones es reproduciendo ciclo a ciclo la variación de éstas. Ello, con los medios disponibles actualmente, lleva a unos tiempos de cálculo prohibitivos, siempre que el número de ciclos sea superior a un número reducido.

Por ello, en casos de carga de variación irregular, se emplean otros procedimientos más rápidos, basados en modelos simplificados. Unos hacen uso del MEF y otros de distintos métodos más simples. Entre las hipótesis simplificativas básicas de que hacen uso estos procedimientos, pueden incluirse:

- Además de asumir comportamiento estable, se considera que éste, en estados de tensión bi o tridimensionales, es similar al de casos monodimensionales.
- Se supone que en cualquier punto, la dirección de los planos principales va a ser constante, cuando en realidad, incluso con cargas cuya dirección no cambia, los planos principales sufren un giro al modificarse el módulo de Poisson como consecuencia de la deformación plástica.
- También se considera que todos los puntos, durante la carga y descarga, van a seguir el mismo lazo de histéresis, alcanzando distintos valores de  $\Delta\sigma$  e  $\Delta\varepsilon$ , dependiendo del nivel de tensiones.
- Si, durante un semiciclo, se produce una descarga menor y posterior carga hasta el nivel previo, la evolución del estado del material se representa por un ciclo de histéresis pequeño, cerrado en el punto de cambio de sentido inicial de la carga (puntos *d, e* y *f* de la Figura 6). También se supone que existe un efecto de memoria del mismo tipo que el comprobado experimentalmente en casos monodimensionales. De esta forma, al volver el ciclo anterior al punto *f*, la pendiente de la curva de comportamiento cambia, y vuelve a tomar el valor que tenía antes de llegar al punto *d*.

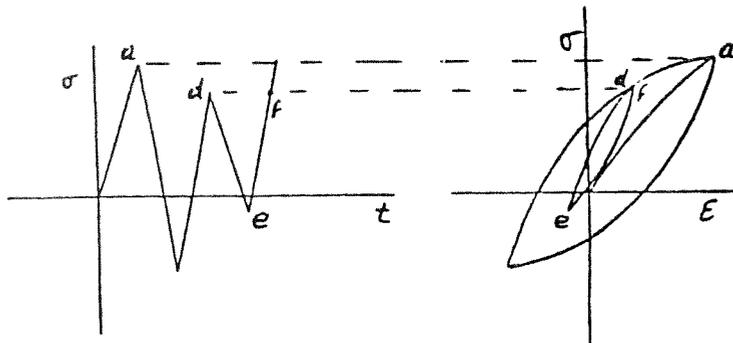


Figura 6. Efecto de memoria en el comportamiento

El primer paso para la solución del problema mediante los métodos simplificados mencionados es la obtención de una curva de tarado  $P - \epsilon$  que permita convertir el registro de cargas producidas en otro de deformaciones. En ella se representan los valores de las deformaciones obtenidas en comportamiento estable, para distintos niveles de carga de amplitud constante.

Puede hacerse experimentalmente, midiendo las deformaciones durante ensayos de carga cíclica de amplitud constante, o mediante el MEF, empleando la curva de comportamiento cíclico. En este último caso, puede determinarse bien sea la deformación principal o tangencial máxima o una deformación efectiva para cada nivel de carga.

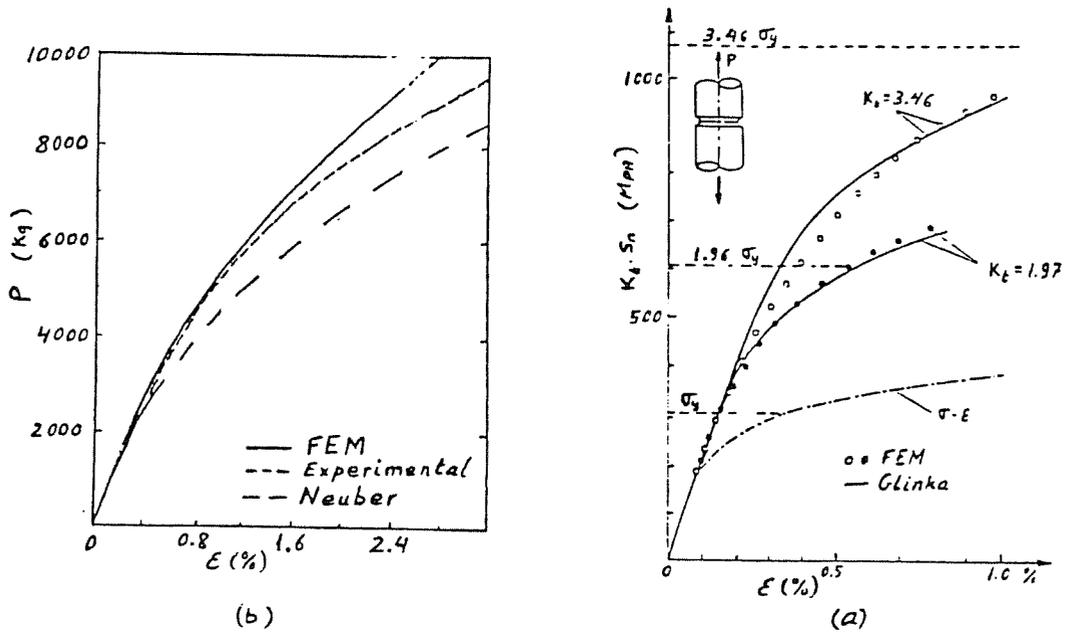


Figura 7. Ejemplos de curvas  $P - \epsilon$ .  
 (a) Acero Cromo-Molibdeno<sup>14</sup>.  
 (b) Acero RQC 100<sup>5</sup>.

Otras aproximaciones usadas para obtener esta curva son: la regla de Neuber<sup>12</sup>; o la propuesta por Molski y Glinka<sup>13</sup>. Para cada geometría, llegan a relaciones simples entre  $\epsilon$  y  $P$  en el punto objeto de estudio que, junto con la ley de comportamiento, permiten predecir los niveles de deformación producidos. La solución de estas ecuaciones debe hacerse por métodos numéricos, pero no reviste ninguna dificultad especial. En la Figura 7 se muestran algunos ejemplos de curvas  $P - \epsilon$  para dos materiales cuyas leyes de comportamiento corresponden a las de la Figura 4.

La conversión de la historia de carga en otra de deformación (Figura 8) se realiza mediante algún algoritmo que reproduzca los ciclos de histéresis teniendo en cuenta el efecto de memoria<sup>15</sup>. Los más usuales dividen la curva en un número suficiente de tramos rectos y, a medida que van haciendo uso de ellos en carga o descarga, les asigna un identificador que

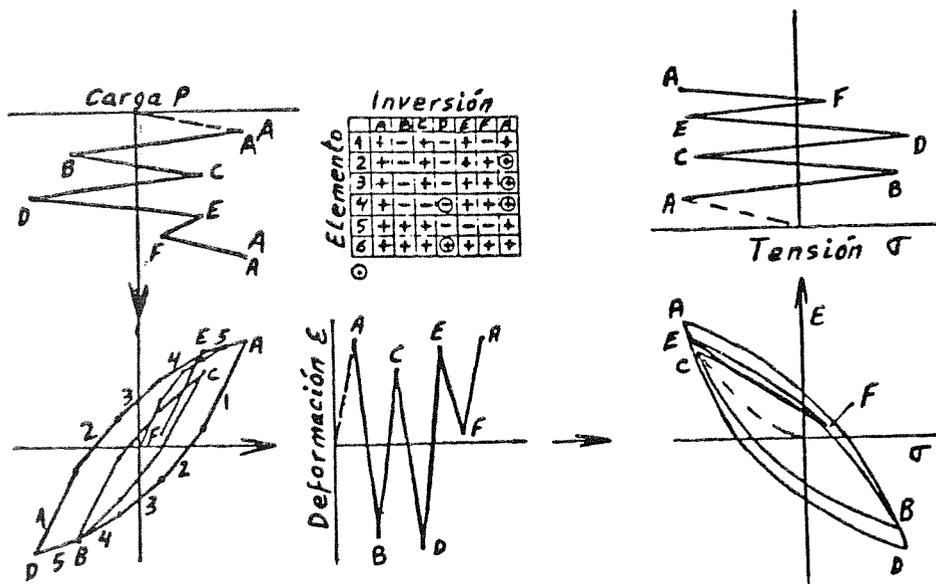


Figura 8. Transformación de una historia de carga en otra de deformación y tensión

permite saber el sentido de la carga en que han sido empleados la última vez. En el caso de la Figura 8, el identificador se asigna a través de la "availability matrix"<sup>16</sup>. En cualquier instante se aplicará el tramo de mayor pendiente de los que la última vez se emplearon con carga en sentido contrario. Al mismo tiempo que se obtiene la historia de deformaciones, la ecuación (3) de la ley de comportamiento permitirá conocer los valores de las tensiones medias de cada ciclo de histéresis.

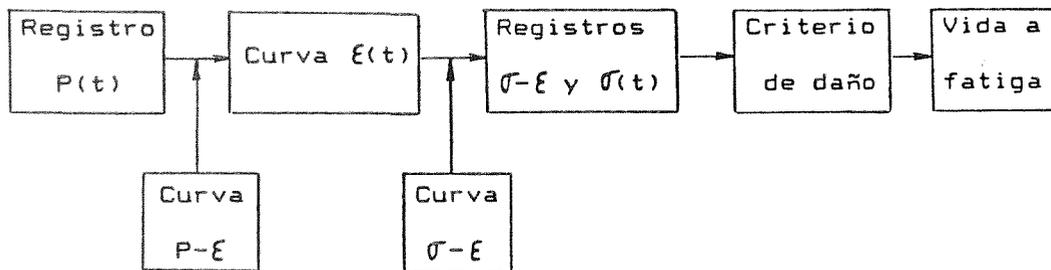


Figura 9. Proceso de cálculo de la vida en iniciación con cargas de amplitud variable

Para determinar la vida en nucleación, solo habrá que determinar  $N$  en las curvas de Manson-Coffin —ecuación (1) o Figura 1— cada vez que se cierre un ciclo de histéresis, y aplicar algún criterio de daño acumulado. Normalmente se emplea el lineal o de Miner, que puede expresarse:

$$D = \sum_{i=1}^{N_f} \frac{1}{N_i} \quad (4)$$

siendo el número de ciclos para el fallo ( $N_f$ ) el valor de  $i$  para el que  $D$  se hace igual a la unidad.  $N_i$  es el valor de  $N$  en la ecuación (1), correspondiente a la deformación del ciclo  $i$ .

En general estos procedimientos simplificados pueden esquematizarse como se hace en la Figura 9. Resuelto el cálculo de la relación  $P - \varepsilon$ , la simulación de toda la historia de deformaciones y tensiones es muy rápida, ya que cada fase es una simulación muy simple o la solución de una o dos ecuaciones implícitas.

### 3. PROPAGACION

El crecimiento de grietas por fatiga es consecuencia directa de la deformación plástica cíclica que se produce en el borde de éstas. Existen numerosos modelos que tratan de explicar el proceso de crecimiento<sup>16</sup>. Excepto en algunos casos de materiales o condiciones ambientales específicas, todos coinciden en responsabilizar de este crecimiento a los deslizamientos producidos en determinados planos que confluyen en el borde.

Cuando se cumplen los requisitos de la mecánica de la fractura elástica lineal (MFEL), el parámetro básico para caracterizar el comportamiento del borde de la grieta es  $K$ . Aunque éste es con diferencia el más importante, también deben considerarse otros que, de una forma u otra, afectan al estado de tensiones y deformaciones y a la velocidad de crecimiento en cada material. Entre ellos se incluyen: el coeficiente de asimetría de los ciclos ( $R$ ); el espesor ( $t$ ); la temperatura ( $T$ ); la tensión nominal máxima ( $S_{max}$ ); y el ambiente. Cuando la (MFEL) no es aplicable se han propuesto varios parámetros básicos, sin que por el momento exista uno que prevalezca sobre el resto.

Las variables indicadas permiten el estudio de la velocidad de propagación de una grieta ante cargas variables de amplitud constante. Si la amplitud varía, la historia de carga condiciona el comportamiento del borde de la grieta, y los parámetros mencionados no son suficientes para predecir el comportamiento, y por tanto, la velocidad de crecimiento.

Aunque  $\Delta K$  tiene gran influencia sobre la velocidad de crecimiento, es más clara y directa la relación existente entre dicha velocidad e  $\Delta K_{ef}$ . Este último parámetro se define como la diferencia entre el valor máximo de  $K$ , y aquel a partir del cual la grieta está completamente abierta durante el proceso de carga<sup>17</sup>:

$$K_{ef} = K_{max} - K_{op} \quad (5)$$

El valor de  $K_{op}$  depende de las tensiones residuales generadas por la acumulación de deformaciones plásticas en las proximidades del borde de la grieta, y de las deformaciones residuales de tracción de las caras de la misma, producidas al paso de su frente. Estos alargamientos son el resultado de haber formado parte de la zona plástica del borde, cuya deformación residual es de tracción, unido al proceso de crecimiento, que ocurre durante el semiciclo de carga (Figura 10). Ello hace que en la descarga, durante los ciclos de fatiga, las caras de la grieta entren en contacto antes de llegarse a la tensión nominal nula. El valor de la tensión en ese instante es la tensión de cierre de la grieta ( $S_{cl}$ ). Si la descarga continúa.

las superficies en contacto se verán sometidas a tensiones de compresión. Al aumentar la carga después del mínimo, las caras comenzarán a descargarse, hasta el momento en que el último punto alcance la tensión cero. La carga correspondiente a ese punto es la que produce el valor de  $K_{op}$  y, la tensión nominal el de la tensión de apertura ( $S_{op}$ ).

Se ha comprobado que la ley de crecimiento en cada material puede expresarse en la forma:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R, t, T, \text{ambiente}) \quad (6)$$

Empleando  $\Delta K_{ef}$  en vez de  $\Delta K$ , ésta puede reducirse a:

$$\frac{da}{dN} = g(\Delta K_{ef}, T, \text{ambiente}) \quad (7)$$

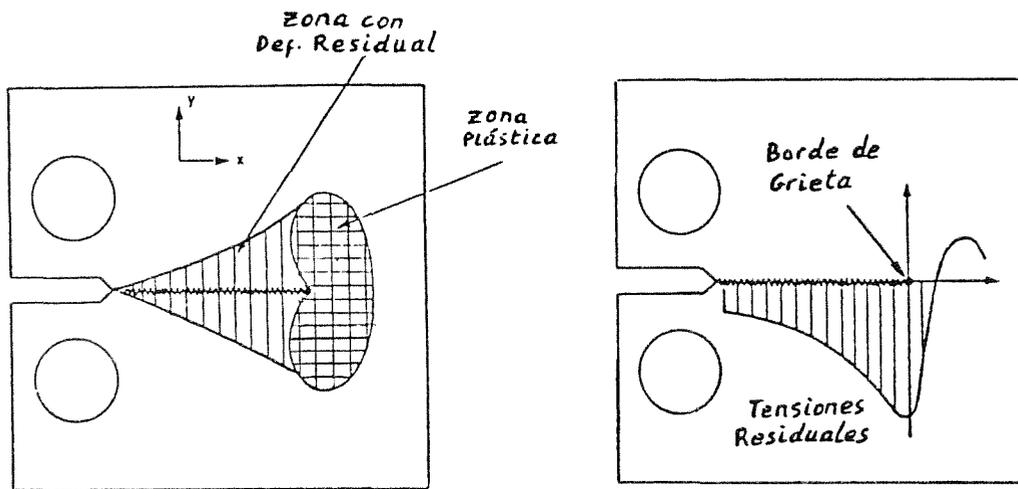


Figura 10. Zona plástica, zona con deformación residual en las superficies y tensiones residuales sin carga

El problema que se presenta es la determinación de  $\Delta K_{ef}$  que, excepto en casos muy simples para los que existen fórmulas empíricas, debe hacerse por métodos numéricos. Antes de considerar los métodos empleados y sus particularidades, es conveniente analizar brevemente el proceso sufrido por el material al paso del frente de la grieta.

En la Figura 11 se muestra esquemáticamente la distribución de tensiones en las proximidades de una grieta emanando de un taladro de radio  $C$ . Se representan los valores correspondientes a tres niveles de un ciclo simétrico de carga: máximo; medio -carga nula-; y mínimo.

Pueden distinguirse cuatro zonas distintas por las que irá pasando un punto del material al ir avanzando la grieta:

La primera, a la derecha del borde, alejada de éste, donde el comportamiento del material es elástico.

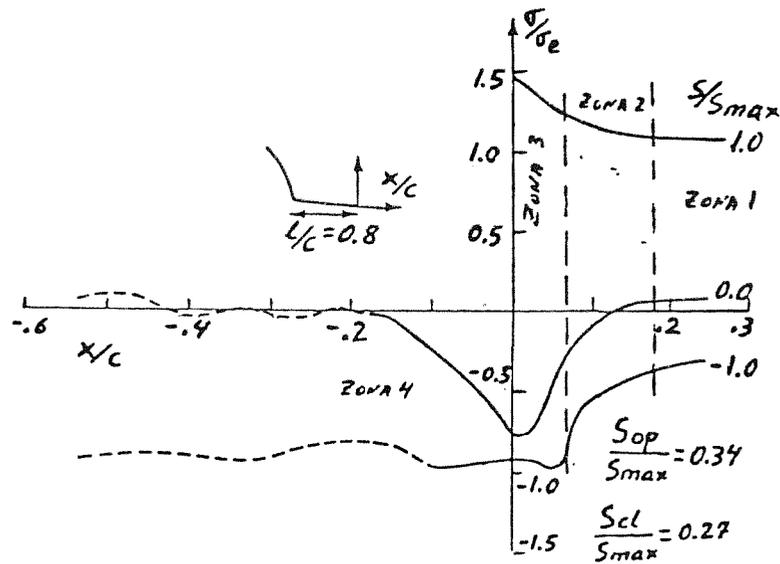


Figura 11. Distribución de tensiones en las proximidades del borde con tres niveles de carga<sup>24</sup>

Otra, más cercana al borde, donde el material llega al límite elástico y sufre endurecimiento por deformación en tracción pero no alcanza el límite de fluencia en compresión. La ley de comportamiento en esta zona será la del ensayo estático, siendo elástica todo el ciclo, excepto en las proximidades del máximo. Al haberse producido previamente un incremento de longitud de la grieta y por tanto haberse acercado el punto al borde, poco antes de alcanzarse el máximo de carga se producirá una nueva fluencia plástica de tracción. Esta región es la parte de la zona plástica más alejada del borde.

La tercera zona es la más próxima al borde de la grieta, en la que se produce fluencia tanto en tracción como en compresión. Es la denominada zona plástica cíclica. En cuanto al comportamiento, pueden hacerse dos diferencias más respecto a la anterior; el material seguirá una ley próxima a la de comportamiento cíclico, en vez de a la del ensayo estático; además, debido a la fluencia cíclica se produce una relajación del material en esta zona.

Por último, la zona de las caras de la grieta, donde permanecen unas deformaciones plásticas de tracción que generan tensiones de compresión cuando  $K$  es menor que  $K_{op}$ . El valor de las deformaciones residuales en cada punto de esta zona dependerá de la historia de cargas producida mientras que formaba parte de la zona plástica y de las compresiones producidas una vez alcanzada la superficie de la grieta.

Para determinar  $K_{op}$  y  $\Delta K_{ef}$  es necesario conocer la historia de deformaciones sufrida por el material. A la vista de la complejidad del comportamiento y de las distribuciones de tensiones y deformaciones producidas puede deducirse que, actualmente, la única forma de determinar  $K_{op}$  es mediante simulación, con la ayuda de algún método numérico que permita determinar la evolución de las tensiones y deformaciones. Entre ellos cabe destacar el MEF, que ha producido los mejores resultados, y otros métodos simplificados, entre los que sobresale el de Newman<sup>19</sup>. Estos últimos son actualmente los únicos que permiten la simulación de un alto número de ciclos.

En la Figura 12 se representa un esquema de los pasos seguidos para la simulación de un caso genérico de carga de amplitud variable en el que es aplicable la MFEL. Lo primero será la lectura de los datos de características del material y geometría, y la modelización de la misma, especialmente la zona de la grieta. A continuación, se procede ciclo a ciclo de la forma siguiente:

- a. Lectura de las cargas máximas y mínimas del ciclo correspondiente y determinación de los valores de  $K_{max}$  y  $K_{min}$  asociados. Puede hacerse numéricamente u obtenerse a partir de tablas o expresiones simples, en función de la geometría y carga.
- b. Si el ciclo no es el primero, obtención de  $K_{op}$  y cálculo del incremento de longitud  $da/dN$  correspondiente al valor de  $\Delta K_{ef}$  obtenido previamente.  $K_{op}$  puede determinarse por algún procedimiento numérico, aumentando paso a paso la carga para detectar el punto en que las caras empiezan a separarse. Existen varias fórmulas empíricas que permiten aproximar  $K_{op}$ , pero con un coste en precisión.

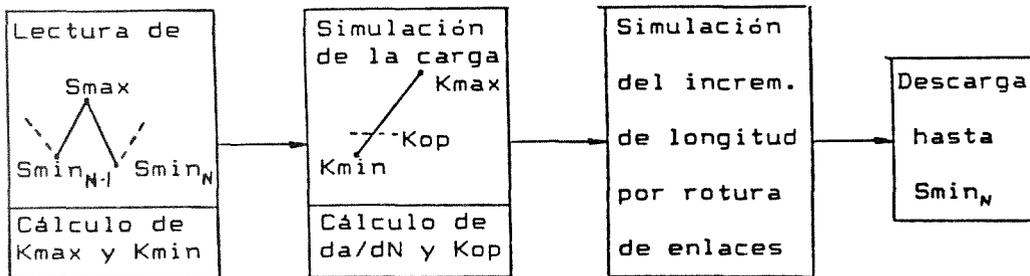


Figura 12. Simulación de un ciclo de crecimiento

- c. Aumento de la carga hasta el valor máximo y simulación del crecimiento. Esto último se consigue haciendo avanzar el frente de la grieta y modificando el estado de tensiones y deformaciones, como consecuencia de la separación de las superficies.
- d. Descarga hasta el valor mínimo, teniendo en cuenta las variaciones de geometría por cambio de las dimensiones de la zona de contacto. Con ello se completa el ciclo y puede comenzarse otro nuevo, volviendo al punto a.

#### 4. SIMULACION DE LA PROPAGACION MEDIANTE EL MEF

El método de los elementos finitos se ha empleado en el estudio del crecimiento de grietas por fatiga con diversos objetivos. Uno de ellos es únicamente el conocimiento de los parámetros clásicos de la mecánica de la fractura, como son  $K$ ,  $J$ ,  $CTOD$ , etc., que permiten caracterizar el estado de la grieta. En el proceso descrito previamente sería aplicable para la

obtención de  $K_{max}$  y  $K_{min}$ . Su aplicación es idéntica a cualquier caso estático de mecánica de la fractura.

Otro posible objetivo del MEF es la simulación del modelo de crecimiento, considerando una escala un orden de magnitud superior a la utilizada en la MFEL<sup>19,20</sup>. La escala permite considerar distintos granos en el material y diferentes bandas de deslizamiento en el borde. Con ello se pretende simular el fenómeno real de deformación y deslizamiento que se produce durante cada paso del proceso de crecimiento.

El tercer tipo de aplicación es la simulación de la evolución de las tensiones y deformaciones en el borde y en la superficie de la grieta, considerando un medio homogéneo. Teniendo en cuenta que el fin de este análisis es la determinación de la velocidad de crecimiento, el resultado suele expresarse mostrando la evolución de  $S_{cl}$ .

Tanto en el caso del segundo como del tercer objetivo, hay que resolver el problema incrementalmente, paso a paso, y hacer una serie de hipótesis de comportamiento del material. La mayoría de los estudios realizados hasta la fecha hacen prácticamente las mismas que se han indicado para el análisis de los concentradores: superficie de fluencia de von Mises y endurecimiento cinemático con el modelo de Prager-Ziegler<sup>21-23</sup> o comportamiento elástico-perfectamente plástico<sup>24,25</sup>. En general, la aplicación del MEF es similar a la de un caso elasto-plástico, aunque deben considerarse varias peculiaridades, que se describen brevemente a continuación.

#### 4.1. Cambio de geometría por crecimiento de la grieta

Si se pretende representar el crecimiento a nivel de cada grano, el modelo de crecimiento y la discretización deberán permitir modelar de alguna forma la rotura de los enlaces y las bandas de deslizamiento<sup>20,21</sup>. Habrá que distinguir cada grano del material. Las líneas y bandas de deslizamiento del frente de grieta se corresponderán con contornos de elementos del mallado, de forma que puedan permitirse movimientos discretos de unos respecto a otros. Deberá haber tantos contornos de elementos como líneas de deslizamiento se pretendan representar, lo que exigirá normalmente un gran número de ellos. Además, deberá discretizarse a este nivel toda la zona por la que se va a hacer pasar el frente de la grieta.

Este tipo de representación detallada exige un gran número de grados de libertad. En cada ciclo se producirá un incremento de longitud de grieta normalmente menor de una micra. Considerando que con carga de amplitud constante  $S_{cl}$  no se estabiliza hasta que el crecimiento ha sido de algunos milímetros, será necesario simular varios miles de ciclos. La necesidad de resolver incrementalmente cada ciclo y el número de grado de libertad necesarios, generan unos tiempos de cálculo que hacen impensable la determinación de  $S_{op}$  o  $S_{cl}$  con este tipo de modelos.

Como alternativa se modela el crecimiento considerando el material como un medio homogéneo y produciendo incrementos de longitud bastante mayores, aunque aún pequeños, comparados con el tamaño de zona plástica. El problema que se presenta es reproducir las deformaciones reales ocurridas en cada punto al pasar por sus proximidades el frente de la grieta. Para determinar estas deformaciones se cambia la geometría del modelo, haciendo que la grieta aumente su longitud en un instante determinado durante el semiciclo de carga.

Así, se formarán nuevas superficies libres en puntos deformados plásticamente en tracción, manteniendo cierta deformación residual una vez pasado el frente. Numéricamente puede conseguirse este efecto de dos formas distintas.

- 1) Haciendo que dos elementos de la malla, pertenecientes al borde, se separen por un nodo cuando la carga alcanza un porcentaje determinado del máximo en el ciclo. Ello exige la discretización previa del modelo haciendo coincidir la línea por donde va a crecer la grieta con líneas de unión entre elementos. Cada par de nodos se separará al llegar a ellos la grieta, entrando a formar parte de las superficies de ésta. La condición de que los nodos estén unidos antes de llegar el frente puede imponerse por dos procedimientos:

- Incluyendo ecuaciones de restricción, que se harán desaparecer al separarse.
- Uniendo los nodos mediante un elemento elástico de gran rigidez comparada a las de los elementos, que habrá que hacer nula para permitir la separación.

Ambas soluciones implican la modificación de la matriz de rigidez cada incremento de longitud. Normalmente se prefiere la segunda solución a la primera por ser más fácil de implementar y exigir menor tiempo de cálculo de la nueva matriz de rigidez. Especialmente cuando sólo se discretiza media grieta, en cuyo caso los elementos elásticos serán de unión al contorno fijo, y sólo participarán en la diagonal de la matriz de rigidez del sistema.

La reproducción del crecimiento consta de los pasos siguientes (Figura 13).

- a. Aplicación de la carga hasta el valor máximo, u otro definido.
- b. Variación de la matriz de rigidez, haciendo nulo el valor correspondiente al elemento elástico entre los nodos a separar. Al mismo tiempo, deben incluirse en los nudos separados dos fuerzas iguales a las de cohesión eliminadas.

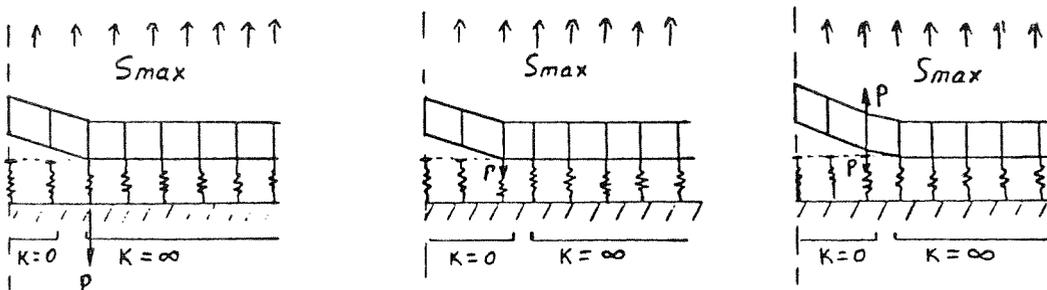


Figura 13. Separación de elementos para permitir el crecimiento. Elementos elásticos con rigidez variable

- c. Relajación de las cargas aplicadas en lugar de las de cohesión. Dado el carácter no lineal del problema, esta relajación deberá hacerse aplicando incrementalmente unas fuerzas iguales y de sentido contrario a las que se quieren relajar.

- d. Continuación del proceso de carga con la nueva geometría. Aumentando ésta hasta el máximo, si no se había alcanzado o comenzando el semiciclo de descarga.

Esta forma de simulación del crecimiento tiene un inconveniente fundamental. El mínimo incremento de longitud de grieta posible es igual a la distancia entre nodos del modelo. Para reproducir el estado del material en las proximidades del frente no es necesario llegar a incrementos como los reales, pero deben ser pequeños comparados con el tamaño de la zona plástica. Por ello, exige una discretización muy fina en la zona por donde se va a producir el crecimiento. El número de grados de libertad necesarios será muy grande, aumentando a medida que crece el incremento de longitud total a simular. Como muestra pueden indicarse los trabajos de Fleck<sup>26</sup> y Lalor et al<sup>24</sup>. El primero, para calcular  $S_{cl}$  durante un incremento de longitud de la grieta del 2% del ancho del espécimen, necesitó elementos menores del 5% del incremento total deseado, y un número de grados de libertad igual a 2114. El segundo, para simular el crecimiento a partir de una entalla tuvo que usar elementos de  $28\mu\text{m}$  de lado.

La necesidad de una discretización muy fina, por imperativos de la simulación del crecimiento, permite el uso de elementos de deformación constante sin que aparezcan problemas de precisión en las tensiones o deformaciones en el borde.

- 2) Otro método de simulación del crecimiento es el propuesto por Nakagaki y Atluri<sup>23</sup>. Empleando elementos singulares<sup>27</sup>, con forma de sector circular o trapezoidales, de 8 nodos, proponen representar el crecimiento mediante modificación de la geometría por desplazamiento del borde de la grieta. El método es algo más complejo, pero tiene dos ventajas: permite el uso de discretizaciones más groseras; y no existe restricción en el tamaño mínimo del incremento de longitud de grieta. El proceso a seguir para la simulación es igual al descrito previamente, excepto el punto *b*, que se hará de la forma siguiente (Figura 14):

- b'. Desplazamiento de la malla en la zona del borde una cantidad igual al incremento de longitud a reproducir. Ello implica una modificación de la geometría y, por tanto, de la matriz de rigidez. Sólo se desplazarán los elementos próximos al borde de la grieta, manteniéndose inmóviles y sin variar su dimensión los que están más distantes. Así, la matriz de rigidez sólo variará en los términos asociados a los pocos elementos modificados.

Los valores característicos del estado e historia de tensiones y deformaciones en los puntos de la nueva geometría se obtendrán mediante interpolación entre los de la geometría anterior. Las tensiones existentes anteriormente en la zona de la nueva superficie de grieta se distribuirán entre los nuevos nodos próximos, manteniéndose el equilibrio.

El uso de elementos singulares permite obtener el mismo orden de aproximación con una discretización más grosera. Además, mientras que con el procedimiento anterior hay que discretizar finamente toda la zona por la que va a moverse el frente, con este

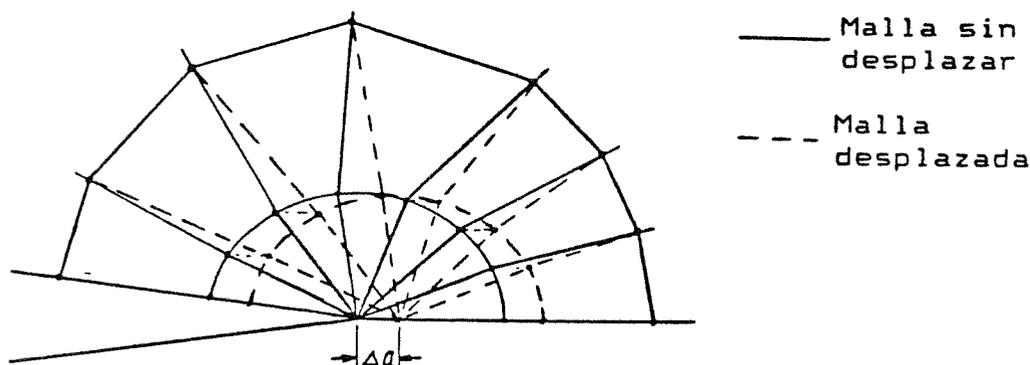


Figura 14. Desplazamiento de la malla en el borde.

método no hay que prestar especial atención a esta zona. Los elementos especiales se desplazan con el frente de la grieta y el resto de los elementos nunca participa en la simulación del estado del borde. Ello hace disminuir bastante el número de ecuaciones y el tiempo total de cálculo.

Como inconveniente de este método cabe decir que el paso  $b$ , correspondiente a la representación del incremento de longitud de la grieta, es bastante más lento y complejo. Las interpolaciones a realizar y la obtención de las matrices de rigidez de los nuevos elementos implican una programación más complicada y, sobre todo, mayor tiempo de cálculo. Además, el número de elementos a modificar en la matriz de rigidez global es mayor.

Una ventaja importante, apuntada previamente, es la posibilidad simular cualquier valor de incremento de longitud de la grieta. Con ello se pueden adaptar mejor los incrementos a los valores máximos permitidos, en función de las amplitudes de la carga. Esto permitirá usar la misma discretización con distintos niveles de carga, sin variar el nivel de precisión. Con carga de amplitud variable será posible conseguir el aumento de longitud total deseado con menor número de incrementos, con el consiguiente ahorro de tiempo.

#### 4.2. Necesidad de disminuir el tiempo de CPU

El carácter incremental iterativo del método hace que el sistema de ecuaciones deba ser resuelto en cada iteración e incremento de carga, adaptando la matriz de rigidez en función de los resultados de cada paso. Los términos de esta matriz a modificar alguna vez son aquellos que en algún momento del proceso se llegan a plastificar. Los asociados a zonas que permanecen en régimen elástico no cambiarán en todo el proceso de crecimiento. Por ejemplo, en un sistema como el de la Figura 15, la zona A sufrirá plastificación durante el crecimiento, mientras que la B se mantendrá en régimen elástico.

Para reducir el tiempo de cálculo en cada paso del proceso iterativo, se recurre a la condensación de los grados de libertad del interior de la zona elástica que, así, intervendrán únicamente en la solución de la primera iteración en el primer incremento de carga. Después,

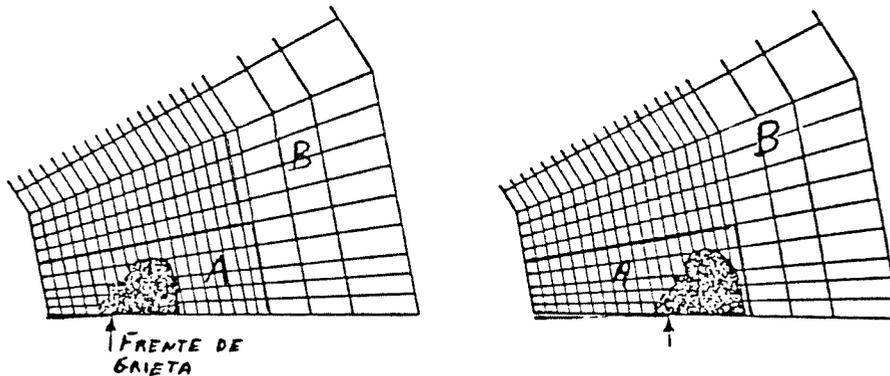


Figura 15. Zonas: (A) con deformación plástica durante el crecimiento; y (B) con deformación elástica.

hecha la condensación, sólo habrá que resolver el sistema con la matriz resultante de ésta, con lo que se habrá reducido el número de ecuaciones y el tiempo de cálculo.

El ahorro de tiempo conseguido con la condensación dependerá de la relación entre el número de grados de libertad de la zona que sólo sufre deformaciones elásticas y el total de ellos. Este ahorro es especialmente significativo cuando se representa el crecimiento desplazando los elementos del borde, ya que los que plastifican son siempre los mismos. Sólo habrá que dejar sin condensar éstos y los asociados a elementos que varían su forma como consecuencia de los desplazamientos.

#### 4.3. Control del cierre de grieta y consideración del contacto

Si se considera como punto de partida el instante en que se ha producido la carga máxima, a continuación comenzará a disminuir ésta y a acercarse las superficies. Como la solución de cada ciclo debe hacerse paso a paso, no es difícil detectar el instante en que el primer punto de una superficie entra en contacto o se cruza con otro de la cara opuesta. En el instante en que se detecta debe detenerse el proceso de descarga. Si los puntos se han cruzado, mediante interpolación puede conocerse el valor de la tensión nominal a la que entraron en contacto ( $S_{ct}$ ).

Detenido el proceso de carga, si los puntos se han cruzado, habrá que aplicar una carga nodal, paso a paso, o imponer movimientos a estos hasta que coincidan. A partir de ese momento se impedirá el movimiento perpendicular a la superficie mientras que las tensiones sean de compresión. El proceso anterior implica la modificación de la matriz de rigidez cada vez que dos nodos llegan a coincidir, igual que ocurre con cualquier problema de contacto.

Impedido el movimiento del nodo correspondiente, se proseguirá a la descarga hasta que se detecte un nuevo contacto, volviéndose a repetir el proceso anterior. Y así, sucesivamente, hasta alcanzar la carga mínima del ciclo.

Desde el mínimo se comenzará a aumentar la carga, controlando el instante en que la tensión en algún nodo de la superficie comienza a ser positiva. En ese instante debe permitirse de nuevo la separación de dicho nodo, eliminando las restricciones impuestas previamente. El proceso vuelve a implicar, como en el cierre, una modificación de la matriz de rigidez cada vez que se modifican las restricciones. La tensión nominal en el instante en

que se produce la separación de los últimos puntos en contacto de la superficie es  $S_{op}$ .

Normalmente se usan dos procedimientos diferentes para imponer las condiciones de desplazamiento en las superficies de la grieta. Uno es, mediante ecuaciones de restricción, forzando a la igualdad de movimientos de los puntos en contacto en dirección perpendicular a la superficie, y eliminando dicha restricción en el momento que el nudo en cuestión comienza a estar sometido a tracción. Otro es, incluyendo elementos elásticos entre los nudos que pueden llegar a contactar y variando su rigidez dependiendo de que estén en tracción o compresión. Con fuerzas de tracción la rigidez debe ser despreciable. Cuando sean de compresión debe tener un valor muy alto comparado con el resto de los términos. Este segundo procedimiento permite un control más fácil del contacto, ya que sólo habrá que detectar cambio de signo en las fuerzas sobre los elementos elásticos o en los desplazamientos de los puntos de las dos superficies. Con el procedimiento de inclusión de restricciones de desplazamiento, el control será de movimientos cuando los puntos estén separados y de tensiones cuando se muevan conjuntamente en dirección perpendicular a la superficie de la grieta.

#### 4.4. El caso tridimensional

Hasta ahora, prácticamente todas las aplicaciones del MEF al análisis de las tensiones de cierre se han hecho para el caso bidimensional. Sin embargo, la realidad del comportamiento de una grieta muchas veces no obedece a los representados mediante modelos de este tipo. Como ejemplo puede mencionarse una grieta semielíptica, originada en el centro de una superficie o, más frecuente aún, una, originada en una esquina. En realidad, todas las grietas comienzan siendo de algún tipo difícilmente representable mediante modelos bidimensionales, pudiendo pasar, después de cierto crecimiento, a una geometría que permite dicha representación. A esto se une el hecho de que, muy frecuentemente, la mayor parte del período de crecimiento se consume mientras que éstas tienen una dimensión pequeña y no pueden aproximarse mediante modelos bidimensionales.

Incluso en casos generalmente aceptados como bidimensionales, se han comprobado ciertos comportamientos de las tensiones de cierre achacables a la realidad tridimensional de cualquier caso real. Esto parece especialmente significativo cuando los niveles de carga son próximos al umbral de crecimiento  $\Delta K_{th}$ .

Las circunstancias mencionadas han llevado a la necesidad de modelos más complejos que los bidimensionales que consideran todo el espesor bajo las mismas condiciones de tensión o deformación plana. En unos casos se pretende representar la evolución del estado de tensiones del material, desde tensión plana en la superficie hasta deformación plana en el centro. Otras veces no se ve otra posibilidad que buscar algún modelo tridimensional, ya sea de elementos finitos o más simple. En cualquier caso, incluso con modelos más simples, será necesario el empleo de elementos finitos tridimensionales como patrón, para validar los otros.

En la actualidad se está comenzando a aplicar el MEF a la determinación de las tensiones de cierre en casos tridimensionales. Por ahora, sólo se ha hecho con elementos de deformación constante. En la Figura 16 se muestra el modelo empleado por Newman<sup>28</sup> para una grieta semielíptica. Dado el enorme número de grados de libertad necesarios, el tiempo de cálculo

hace impensable su aplicación generalizada para algo más de unos ciclos. Como muestra puede decirse que el modelo de la figura, de 15435 grados de libertad, necesitó 22 minutos de CPU por cada ciclo, en un CYBER.

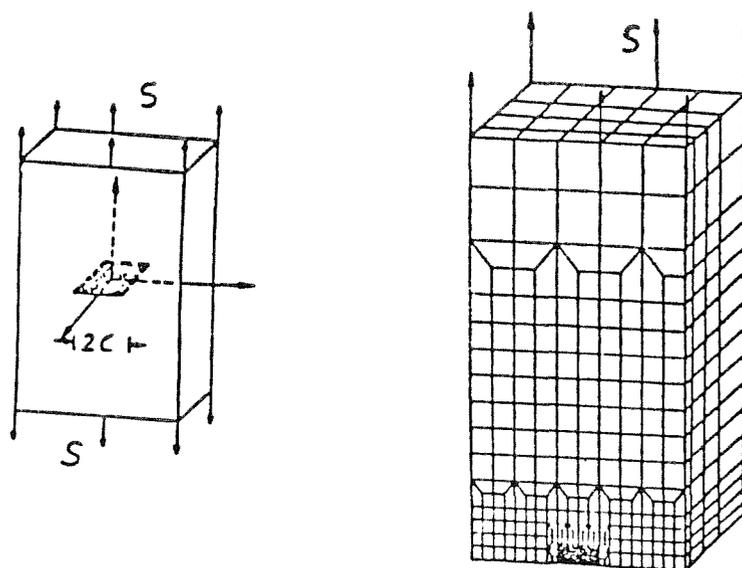


Figura 16. Modelo tridimensional

Del número de grados de libertad necesarios y del tiempo empleado para resolver un caso tan simple como el indicado, se desprende la necesidad de otros procedimientos de reducción del tiempo de CPU. Por el momento parece lejano el uso generalizado de modelos tridimensionales para la determinación de las tensiones de cierre. Sí es importante, y se está comenzando a hacer, su aplicación a casos específicos con geometrías sencillas y pocos ciclos para extrapolar los resultados a otros modelos más simples.

## 5. OTROS METODOS PARA LA DETERMINACION DE LA TENSION DE CIERRE

La lentitud de la simulación del crecimiento y del cálculo de  $S_{cl}$  mediante el MEF limita su aplicación a un bajo número de incrementos de longitud. Con cargas de amplitud constante o con sólo varios bloques de diferente amplitud durante toda la vida de un elemento,  $S_{cl}$  tiende a estabilizarse para cada nivel de carga (Figura 17a). Por tanto, sólo habrá que aplicar el modelo con varios incrementos de longitud por cada nivel considerando que, una vez estabilizada,  $S_{cl}$  se mantiene mientras no se cambie el nivel de tensiones o el coeficiente de asimetría  $R$  de los ciclos. Cuando las cargas varían irregularmente, la tensión de cierre no llega a estabilizarse nunca. En la Figura 17b se muestra un esquema de la evolución de las tensiones de cierre al someter a una probeta a un espectro de carga del

#### IV - Fractura por Fatiga

tipo de los empleados en aeronáutica. En este caso, el crecimiento debe simularse cada ciclo de carga, o al menos cada cierto número pequeño de ciclos<sup>19</sup>, durante todo el período de crecimiento. Ello hace prohibitiva la aplicación del MEF a los supuestos de cargas de amplitud variable.

Estas dificultades han llevado a la necesidad del empleo de ciertos métodos simplificados para la determinación de la evolución de las tensiones de cierre<sup>29</sup>. Unos se basan en ecuaciones empíricas<sup>30</sup>, en las que se representa  $S_{op}$  en función de varios parámetros de la carga. Otros emplean aproximaciones analíticas basadas en modelos simples de cálculo de tensiones y movimientos en las proximidades del borde y de las superficies de la grieta<sup>31,32</sup>. El modelo básico más empleado es el de Dugdale<sup>33</sup>, modificado normalmente para incluir el efecto del material deformado plásticamente en la superficie de la grieta. A partir de estas aproximaciones se han desarrollado algunos métodos numéricos simples, que permiten la estimación rápida de  $S_{cl}$  ante una secuencia determinada de carga.

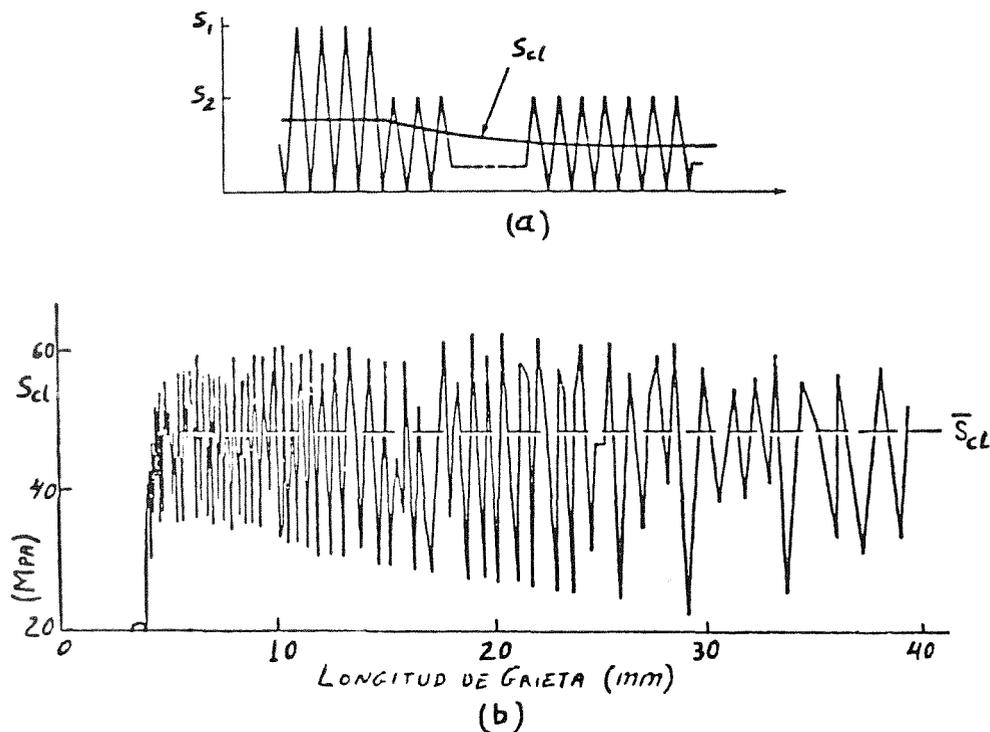


Figura 17. Evolución de  $S_{cl}$ : (a) al variar  $S_{max}$ ; (b) con carga aleatoria<sup>19</sup>

Entre todos ellos, el de Newman<sup>19</sup> es el de más aceptación actualmente. Usando el modelo de Dugdale, se puede determinar el tamaño de la zona plástica y el desplazamiento de las superficies de la grieta resolviendo dos problemas elásticos (Figura 18): uno es una grieta de longitud  $a + r_o$  sometida a la tensión nominal correspondiente; y otro, la misma grieta con unas tensiones  $\sigma_o$  en el tramo de la superficie correspondiente a la zona plástica. Donde  $\sigma_o$  es una tensión asociada a la de fluencia del material.

En cualquier caso, este modelo exige el conocimiento de una solución de  $K$  y de los desplazamientos para la geometría y longitud de grieta objeto de estudio, ante las dos hipótesis de carga indicadas. Para algunas geometrías se conocen soluciones analíticas. De no ser así habrá que buscar algún tipo de solución aproximada o emplear un método numérico simple para su obtención.

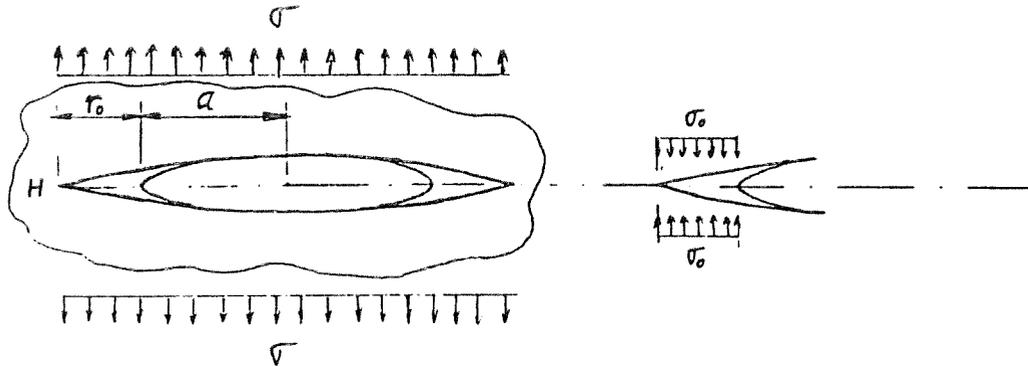


Figura 18. Modelo de Dugdale.

Comparando la grieta real con la ideal del modelo de Dugdale (fig 19), la distancia  $L(x)$  se supone que corresponde al alargamiento total del material situado en la línea vertical correspondiente a la coordenada  $x$ .  $L_c(x)$  es el alargamiento residual del material en el borde, una vez que ha pasado el frente de la grieta.

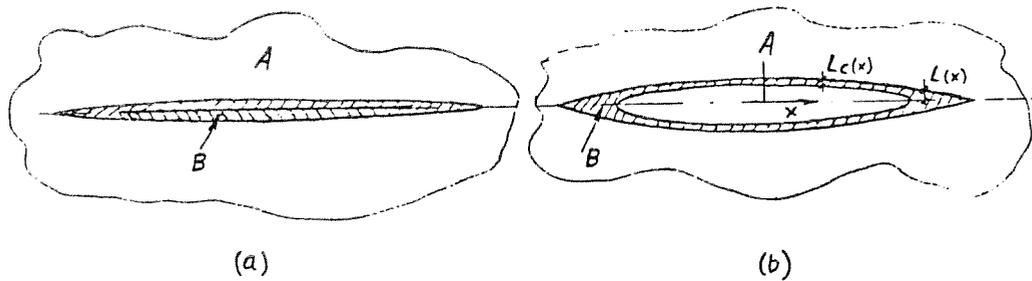


Figura 19. Zonas elástica (A) y plástica (B), con la grieta cerrada (a) y abierta (b).

El estudio numérico parte de la distinción de dos zonas: una de comportamiento elástico (A), fuera de la línea de la grieta de Dugdale; y otra, de comportamiento plástico (B), que corresponde a los alargamientos residuales producidos. Esta última zona se considera dividida en elementos de longitud  $L$  y ancho  $w$ , que pueden alargarse o acortarse plásticamente en función de las tensiones producidas en cada ciclo. El ancho  $w$  puede ser el mismo para cada elemento o, mejor, variable, siendo menores los más próximos al borde.

El proceso completo de cálculo, para cada incremento de longitud, será el siguiente (Figura 20):

- A. Aplicación de la carga y determinación del tamaño de zona plástica, haciendo que no exista singularidad en el punto  $H$  al superponer los estados representados en las Figuras 18a y 18b. Esto es, haciendo:

$$K_I(a) + K_I(b) = 0 \quad (8)$$

- B. Discretización de la zona B de la Figura 19 en elementos, siendo suficientemente pequeños aquellos que están próximos al borde de la grieta (Figura 20a).  
 C. Cálculo de los valores de  $L$  como superposición de la solución al problema de la Figura 18a y los  $n$  problemas de la Figura 20a, correspondiendo cada uno a un elemento discretizado.  
 D. Rotura del número necesario de elementos de la zona plástica para simular el crecimiento deseado. Esta se simula haciendo desaparecer la tensión en la zona de los elementos rotos (Figura 20b).

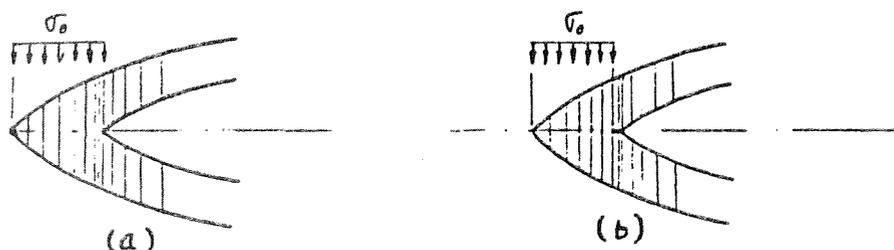


Figura 20. Rotura de los elementos del borde de la grieta

- E. Determinación de la nueva zona plástica. Si su límite está más próximo al borde que el de alguna previamente producida, se mantiene el tamaño correspondiente a la anterior.  
 F. Nueva discretización para volver a dividir la zona plástica en el mismo número de elementos que previamente a la rotura, e interpolación de los valores de  $L$  entre los de la discretización anterior.  
 G. Cálculo de los nuevos valores de  $L$  para cada elemento, con la carga máxima aplicada. Esta determinación se hace mediante solución del sistema de ecuaciones obtenido de la compatibilidad de movimientos:

$$S \cdot f(x_i) - L_i = \sum_{j=i}^n \sigma_j \cdot g(x_i, x_j) \quad (9)$$

Donde  $L_i$  es la longitud del elemento  $i$ , y  $S \cdot f(x_i)$  es el desplazamiento producido por la tensión nominal  $S$  en el punto  $x_i$ . El segundo miembro representa la suma de los desplazamientos producidos en el punto  $i$  por las tensiones  $\sigma_j$  a que están sometidos todos los elementos, incluyendo el  $i$ .  $g(x_i, x_j)$  es, el desplazamiento en el punto  $x_i$ ,

producido por una tensión unidad en el elemento  $j$ .

El sistema de ecuaciones estará sometido a unas restricciones:

$$\sigma_j = -\sigma_o \quad \text{para} \quad \sigma_j < -\sigma_o \quad (10)$$

$$\sigma_j = \sigma_o \quad \text{para} \quad \sigma_j > \sigma_o \quad (11)$$

en la zona plástica, y a otras:

$$\sigma_j = -\sigma_o \quad \text{para} \quad \sigma_j < -\sigma_o \quad (12)$$

$$\sigma_j = 0 \quad \text{para} \quad \sigma_j > 0 \quad (13)$$

en la superficie de la grieta.

En los elementos en que  $j$  tenga que someterse a alguna de las restricciones indicadas, se producirá la fluencia o la separación entre los bordes. Por ello, la incógnita en la ecuación correspondiente del sistema será  $L_i$ . En los casos de separación,  $L_i$  representará la longitud del elemento más la distancia entre las superficies. Si las restricciones anteriores no se producen, la incógnita será  $\sigma_j$ , manteniendo  $L_i$  el valor que tenía previamente.

- H. Aplicación de la carga mínima y nueva solución de la ecuación anterior, para determinar los desplazamientos plásticos residuales ( $L_i$ ). En esta etapa se producirá fluencia de compresión en la zona plástica cíclica y puede que en algún elemento de la superficie.
- I. Cálculo de la tensión de apertura de la grieta ( $S_{op}$ ). Puede definirse como la mínima tensión para la que todos los puntos de la superficie sufren unos desplazamientos iguales o mayores a los producidos por una carga en la la superficie igual a las presiones de contacto<sup>34</sup>. Con esa tensión se produce la separación del último par de puntos.

Terminado el ciclo de carga, se está en condiciones de calcular el crecimiento en un nuevo ciclo, comenzando por la determinación del tamaño de la zona plástica, en la forma realizada en el punto  $E$ . Posteriormente se modificará la discretización como se hizo en el punto  $F$ , y se pasará al punto  $C$ , para repetir todos los pasos hasta el punto  $I$ .

En todo el proceso indicado, se han hecho varias simplificaciones, además de las propias del modelo de Dugdale. Una es la consideración de comportamiento rígido-perfectamente plástico en la zona discretizada del material. También puede emplearse un modelo con endurecimiento por deformación. En ese caso será necesario el cálculo por algún procedimiento de la deformación máxima en el borde, lo que permitirá la deducción de una tensión en dicho punto. Igualmente, será necesaria la consideración de alguna forma de distribución de las deformaciones en la zona plástica, con objeto de determinar la de tensiones, o suponer directamente una distribución de tensiones.

Suponer comportamiento rígido durante el régimen elástico es razonable, ya que en el resto del material del espécimen se está considerando comportamiento elástico, y la longitud de los elementos discretizados es despreciable.

Otra simplificación realizada es la suposición de estado monodimensional de tensiones en todos los elementos en que se ha discretizado la zona  $B$  de la Figura 19. Con objeto

de poder considerar estados bidimensionales de tensión, deformación plana, o intermedios, puede modificarse la tensión de fluencia mediante un parámetro multiplicador  $\alpha$ , que varía entre 1, para tensión plana, y 3 para deformación plana. En situaciones intermedias puede considerarse un valor entre estos dos. Este coeficiente deberá ser distinto en tracción que en compresión ya que la singularidad, con un gran gradiente de tensión, ocurre en el primer caso, pero no en el segundo. Así, con niveles bajos y medios de tensión,  $\alpha$  será próxima a 3 en tracción y a 1 en compresión. Estas modificaciones de la tensión de fluencia deberán hacerse tanto en el cálculo del tamaño de zona plástica como en el sistema de ecuaciones (9) y las restricciones.

El modelo descrito es enormemente más rápido que cualquiera de los existentes de elementos finitos. El tiempo de CPU necesario para cada ciclo de crecimiento es del orden de un segundo en un VAX 780, empleando un máximo de 35 elementos para la discretización: diez en la zona plástica y 25 en la superficie de la grieta. Un incremento del número de elementos producirá una mejora en los resultados, que será despreciable a partir de determinado número. Como ejemplo, puede decirse que doblando el número de elementos respecto al indicado, en una placa con grieta central sometida a tensión uniforme (CCT) sólo se produjo una variación del 1% en los resultados.

Los tiempos necesarios para la aplicación del modelo de Newman permiten simular el crecimiento, cualquier número de ciclos. En la Figura 21 se muestran los resultados de la evolución de  $S_{op}$  después de una sobrecarga, en una probeta CCT de aleación de aluminio 7091-T7E69, sometida a unas tensiones de 57 Mpa, con un coeficiente de asimetría del ciclo  $R = 0.1$ .

## 6. CONCLUSIONES

Como resumen, puede decirse que un problema fundamental en fatiga es la determinación de la evolución de las tensiones y deformaciones en determinados puntos, durante los ciclos de carga a que está sometido un sistema.

En determinados casos es posible la aproximación analítica al problema pero, generalmente, debe hacerse numérica o experimentalmente. El MEF es actualmente el más exacto de los empleados aunque también el más lento. Su lentitud hace muy difícil su uso de forma genérica para un número alto de ciclos y cualquier historia de variación de la carga. Otro método que comienza a aplicarse es el de los elementos de contorno, que, en determinados aspectos, parece tendrá similares posibilidades a las del MEF.

Tanto en iniciación como en propagación de grietas, existen otros métodos menos exactos, pero con una velocidad dos o tres ordenes de magnitud mayor, que son los aplicados generalmente. Especialmente en casos de cargas de variación irregular. Aunque se han propuesto numerosos procedimientos de este tipo para cada fase del proceso de fatiga, dos o tres de ellos prevalecen sobre el resto, habiéndose indicando algunos de ellos.

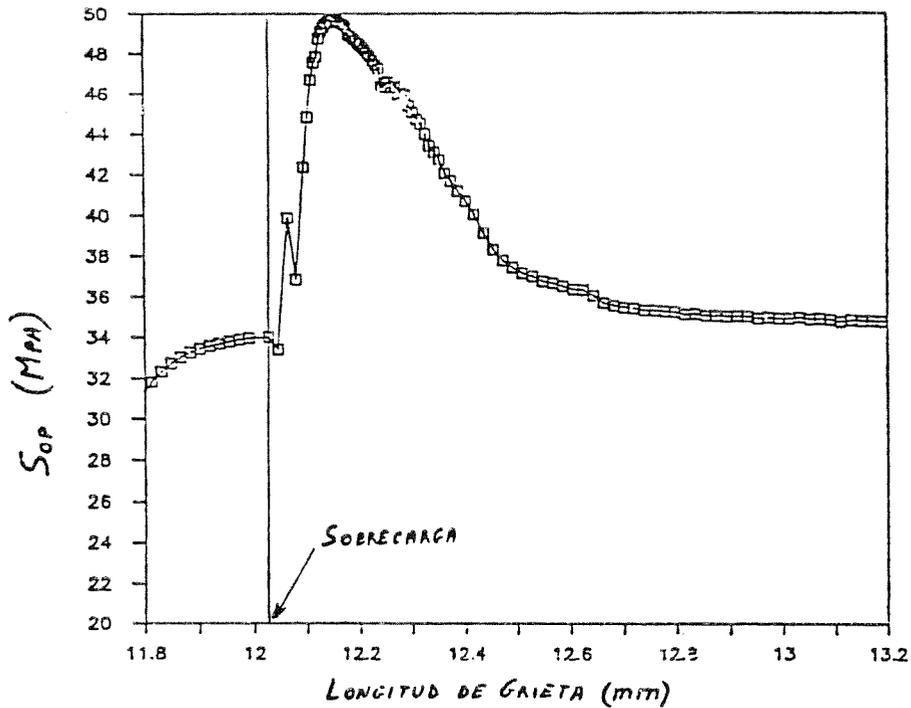


Figura 21. Evolución de  $S_{op}$  después de una sobrecarga

REFERENCIAS

1. Socie D.F., "Fatigue Life Estimates for Bluntly Notched Members", Trans. ASME, *Jour. of Eng. Mat. and Techn.*, Vol. **102**, pp. 153-158, (1980).
2. Schijve J.S., "Four Lectures on Fatigue Crack Growth", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **11**, pp. 167-221, (1979).
3. Dowling N.E., "Notched Member Fatigue Life Predictions Combining Crack Initiation and Propagation", *Fat. of Eng. Mat. and Struct.*, Vol. **2**, pp. 129-138, (1979).
4. Budiansky B. y Hutchinson J.W., "Analysis of Closure on Fatigue Crack Growth", Trans. of the ASME, *Jour of Appl. Mech.*, Vol. **45**, pp. 267-276, (1978).
5. Dowling N.E., "Notched Member Fatigue Life Predictions by the Local Strain Approach", *Fatigue Under Complex Loading*, Wetzel R. M., Ed., SAE, (1977).
6. Mowray D.F. y McConnelee J.E., "Applications of Finite Element Stress Analysis and Stress-Strain Properties in Determining Notch Fatigue Specimen Deformation and Life", *Cyclic Stress-Strain Behavior - Analysis, Experimentation and failure prediction*, ASTM STP **519**, pp. 151-169, (1973).
7. Wilson W.K., "Elastic-Plastic Analysis of Blunt Notched CT Specimens and Applications", *J. of Pres. Ves. Techn.*, pp. 293-298, (1974).
8. Massmann J., "Mechanical Property Testing of High Temperature Materials", AGARD-R-634, (1975).
9. Landgrf R.W., Morrow J. y Endo T., "Determination of the Cyclic Stress-Strain Curve", *J. of Materials*, JMLSA, Vol. **4**, pp. 176-188, (1969).
10. Tucker L. y Bussa S., "The SAE Cumulative Fatigue Damage Test Program", *Fatigue*

- Under Complex Loading, Wetzel R. M., Ed., SAE, (1977).*
11. Morrow J., "Cyclic Plastic Strain Energy and Fatigue of Metals", *Internal Friction, Damping and Cyclic Plasticity*, ASTM STP **378**, pp. 45-87, (1965).
  12. Neuber H., "Theory of Stress Concentration for Shear-strained Prismatical Bodies with Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law", *J. of Appl. Mech.*, pp. 544-550, (1961).
  13. Molski K. y Glinca G., "A Method of Elastic-Plastic Stress and Strain Calculation at a Notch Root", *Mater. Sci. Eng.*, Vol. **50**, pp. 93-100, (1981).
  14. Glinca G., "Energy Density Approach to Calculation of Inelastic Strain-Stress Near Notches and Cracks", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **22**, pp. 485-508, (1985).
  15. Socie D.F., "Fatigue-Life Prediction Using Local Strain Concepts", *Experimental Mechanics*, pp. 50-56, (1977).
  16. Wetzel R., "A Method of Fatigue Damage Analysis", *Ph.D. Thesis*, Dept. of Civil Eng., Univ. of Waterloo, Canada, (1971).
  17. Bowles C. Q. y Schijve J., "Crack Tip Geometry for Fatigue Cracks Grown in Air and Vacuum", *Fatigue Mechanisms: Advances in Quantitative Measurement of Physical Damage*, ASTM STP **811**, pp. 400-426, (1983).
  18. Elber W., "The Significance of Fatigue Crack Closure", *Damage Tolerance in Aircraft Structures*, ASTM STP **486**, pp. 230-242, (1971).
  19. Newman J.C., Jr., "A Crack Closure Model for Predicting Fatigue Crack Growth Under Aircraft Spectrum Loading", *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth Under Random Loading*, ASTM STP **748**, pp. 53-84, (1981).
  20. Kuo A.S. y Liu H.W., "An Analysis of Unzipping Model for Fatigue Crack Growth", *Scripta Met.*, Vol. **10**, pp. 723-728, (1976).
  21. Liu H.W., "Crack Tip Deformation and Fatigue Crack Growth" *Mechanics of Fatigue*, ASME, AMD-Vol. **47**, pp. 53-79, (1981).
  22. Socie D.F., "Prediction of Fatigue Crack Growth in Notched Members Under Variable Amplitude Loading Histories", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **9**, pp. 819-865, (1973).
  23. Nakagaki M. y Atluri S. N., "Elastic-Plastic Analysis of Fatigue Crack Closure in Modes I and II", *AIAA J.*, Vol. **18**, pp. 1110-1117, (1980).
  24. Lalor P., Schitoglu H. y McClung R.C., "Mechanics Aspects of Small Crack Growth from Notches - The Role of Crack Closure", *The Behavior of Short Fatigue Cracks*, EGF Pub. 1, *Mech. Eng. Publications*, pp. 369-386, (1986).
  25. Newman J. C., Jr., "A Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure", NASA TM-X-72005, (1974).
  26. Fleck N. A., "Finite Element Analysis of Plasticity-Induced Crack Closure under Plane Strain Conditions", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **25**, pp. 441-449, (1986).
  27. Atluri S.N., "Higher-Order, Special and Singular Finite Elements", *State - of - the - Art Survey on Finite Element Technology*, Noor A. K. y Pilkey W. D., ASME, pp. 87-125, (1983).
  28. Newman J.C., Jr., "Analytical Modeling of Fatigue Crack Growth", *Southwest Res. Inst. Workshop on Development of Fatigue Crack Tip Deformation Models*, San Antonio, Texas, (1986).
  29. de Koning A.V., "Crack Growth Prediction Methods. Part I: A Survey", NLR TR 84121-L. Part I, (1984).
  30. de Koning A. V., "A Simple Crack Closure Model for Prediction of Fatigue Crack Growth Rates Under Variable Amplitude Loading", NLR MP 8006 U, (1980).
  31. Fuhring H y Seeger T., "Dugdale Crack Closure Analysis of Fatigue Cracks under

- Constant Amplitude Loading”, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **11**, pp. 99–122, (1979).
32. Ibrahim F.K., Thompson J.C. y Topper T.A., “A Study of the Effect of Mechanical Variables on Fatigue Crack Closure and Propagation”, *Int. J. of Fatigue*, Vol. **8**, pp. 135–142, (1986).
  33. Dugdale D.S., “Yield of Steel Sheets Containing Slits”, *Jour. of Mech. and Phys. of Solids*, Vol. **8**, pp. 100–104, (1960).
  34. Newman J.C., Jr. “A Nonlinear Fracture Mechanics Approach to the Growth of Small Crack”, *Behavior of Short Cracks in Airframe Components*, AGARD-CP-328, pp. 6.1–6.26, (1982).

# V - Fractura en Ambientes Agresivos

## METODOS NUMERICOS PARA EL ANALISIS DE LA FISURACION EN MEDIOS AGRESIVOS

M. A. ASTIZ

*E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos  
Universidad Politécnica de Madrid*

### RESUMEN

*En el presente trabajo se pasan en revista los distintos modelos de difusión de hidrógeno en metales desde los más elementales, que se basan en la ley de Fick, hasta los más elaborados, que incluyen el efecto de las trampas. En cada caso se presentan los métodos numéricos que permiten resolver problemas reales. Se da especial importancia a las técnicas de discretización y de integración temporal así como a los problemas de estabilidad.*

### 1. INTRODUCCION

Es conocido desde hace tiempo el papel que juega el hidrógeno en los fenómenos de corrosión bajo tensión a través del mecanismo que se conoce como fragilización por hidrógeno (Kazinczy<sup>1954</sup>; Troiano<sup>1960</sup>). En efecto, muchas reacciones electroquímicas de corrosión tienen como resultado la producción de hidrógeno atómico y su posterior absorción por la matriz metálica. Por otra parte también es posible encontrar aplicaciones en las que el gas hidrógeno esté en contacto con la estructura metálica que lo contiene. Tal es el caso, por ejemplo, de muchos gases combustibles enriquecidos con hidrógeno y almacenados a presiones elevadas y durante períodos de tiempo muy largos y en algún caso a gran temperatura lo que favorece su penetración en el material. Las aplicaciones relacionadas con la producción de energía son las que han incrementado el interés por el estudio de la fragilización por hidrógeno a partir de la crisis energética de 1973.

La presencia de hidrógeno en un material metálico cambia algunas de sus propiedades mecánicas mientras que otras no se ven afectadas. A grandes rasgos, aquéllas que dependen de la deformabilidad del material tales como el módulo de elasticidad, el límite elástico, la dureza o incluso la curva tensión-deformación no cambian de forma significativa en presencia de hidrógeno. En cambio, las propiedades del material relacionadas con la fractura tales como la ductilidad, la tenacidad a la fractura, la resistencia a la fatiga o, más correctamente

en este caso, a la corrosión-fatiga son muy sensibles al contenido de hidrógeno en el material (Hirth<sup>1960</sup>; Gutiérrez-Solana<sup>1961</sup>).

Las razones de este comportamiento parecen residir en el hecho de que el hidrógeno se acumula en las zonas del material donde se desarrollan estados triaxiales de tensiones así como en las dislocaciones, microfisuras y en general, en los puntos donde la malla cristalina esté distorsionada (Hirth<sup>1960</sup>). La presión parcial de hidrógeno y su interacción con las dislocaciones parecen ser las vías a través de las cuales se produce la fragilización.

Dado que es el contenido, o la concentración, de hidrógeno el parámetro que caracteriza la mayor o menor virulencia de este fenómeno y que dicho contenido está determinado por la variable tiempo y por el estado tensional es lógico que dichas variables sean las que controlen los fenómenos de corrosión bajo tensión y de corrosión-fatiga. Por esta razón resulta especialmente interesante estudiar el transporte de hidrógeno desde el ambiente agresivo hasta los puntos más sensibles a la fragilización. Aunque dicho transporte incluye varias fases previas relacionadas con los procesos electroquímicos que se producen en la superficie del material, este trabajo se circunscribirá a la fase de difusión o de transporte por el interior del material metálico.

Por comparación con el trabajo analítico más usual en Mecánica de Fractura consistente en la determinación de parámetros tensionales como el factor de intensidad de tensiones,  $K$ , o la integral  $J$ , en este caso se trata más bien de conocer la propiedad equivalente del material y concretamente el parámetro  $K_{ISCC}$ . En primer lugar, y dado que los métodos presentados admiten una generalización sencilla, se presentarán los modelos de difusión de hidrógeno más elementales y los métodos numéricos correspondientes. En segundo lugar se presentarán los modelos más recientes, que tienen en cuenta la presencia de trampas de hidrógeno en el material, así como los procedimientos de análisis que se pueden aplicar en estos casos.

## 2. MODELOS ELEMENTALES

Los fenómenos de transporte en Física se describen usualmente mediante la ecuación de Fourier

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla c) \quad (1)$$

donde  $c$  es en este caso la concentración de hidrógeno y  $D$  la difusividad. Sin embargo esta ecuación no es válida para describir el fenómeno de la difusión de hidrógeno a causa de la influencia que sobre el fenómeno ejercen las trampas, las tensiones y deformaciones, los obstáculos a la difusión, la variación de la solubilidad del hidrógeno a lo largo del material o el transporte de hidrógeno por las propias dislocaciones. Denominaremos en lo sucesivo modelos elementales a aquellos en los que la ecuación diferencial que los define es una modificación de la ecuación de Fourier.

### 2.1. Modelo de la Tensión Hidrostática

En este modelo, aplicable a materiales en los que las deformaciones son principalmente elásticas, se calcula el flujo de hidrógeno,  $\mathbf{q}$ , mediante una ley de Fick modificada (van Leeuwen<sup>1974</sup>):

$$\mathbf{q} = -D(\nabla c - \frac{V^*}{RT} c \nabla s) \quad (2)$$

donde  $V^*$  es el volumen parcial molar de hidrógeno,  $R$  la constante universal de los gases,  $T$  la temperatura absoluta y  $s$  la tensión hidrostática. De acuerdo con esta ecuación, el hidrógeno se ve atraído hacia las zonas donde es menor la concentración de hidrógeno y donde es mayor la tensión hidrostática (y por lo tanto la deformación volumétrica). Aplicando la segunda ley de Fick se obtiene la ecuación diferencial del fenómeno de difusión:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left( \Delta c - \frac{V^*}{RT} \nabla c \cdot \nabla s - \frac{V^*}{RT} c \Delta s \right) \quad (3)$$

donde el último término se anula para materiales elásticos y en ausencia de fuerzas de volumen.

El planteamiento matemático del problema se basa en exigir que la ecuación anterior se cumpla en el interior del material,  $\Omega$ , en combinación con las siguientes condiciones de contorno,

$$c = \bar{c} \quad \text{en } \Gamma_c \quad (4)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -D \left( \nabla c - \frac{V^*}{RT} c \nabla s \right) \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad \text{en } \Gamma_q \quad (5)$$

donde el contorno  $\Gamma$  del material se ha dividido en dos superficies,  $\Gamma_c$  y  $\Gamma_q$ , a lo largo de las cuales se cumplen respectivamente condiciones de tipo Dirichlet y de tipo Neumann. En la ecuación (5) se entiende que  $\mathbf{n}$  es el versor normal exterior a  $\Gamma$ .

La aplicación del método de los residuos ponderados a este problema conduce a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_1 \left[ \frac{\partial c}{\partial t} - D \left\{ \Delta c - \frac{V^*}{RT} \nabla c \cdot \nabla s - \frac{V^*}{RT} c \Delta s \right\} \right] d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_q} w_2 \left[ \bar{q} + D \left\{ \nabla c - \frac{V^*}{RT} c \nabla s \right\} \cdot \mathbf{n} \right] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

en donde  $w_1$  y  $w_2$  son las funciones peso y donde no se ha incluido la condición de contorno de tipo Dirichlet ya que se supone que esta condición se impondrá directamente al considerar únicamente distribuciones de concentraciones que cumplan la ecuación (4).

Aplicando el teorema de Green y tras algunas transformaciones se llega a una formulación débil del problema (Astiz<sup>1984</sup>) que viene definida por la ecuación,

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial c}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} D \nabla w \cdot \nabla c d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \frac{DV^*}{RT} c \nabla w \cdot \nabla s d\Omega - \int_{\Gamma_q} w \bar{q} d\Gamma \quad (7)$$

en la que se han unificado las funciones peso en una sola,  $w$ , que además se anula a lo largo de  $\Gamma_c$  por imponerse directamente las condiciones de tipo Dirichlet.

La ecuación (7) se puede resolver numéricamente si se discretiza el problema mediante el método de los elementos finitos; en este método se sustituye la función incógnita,  $c$ , por una aproximación que es una combinación lineal de  $c_j$ :

$$\bar{c} = N_j c_j \quad (8)$$

donde  $N_j$  son las funciones de forma.

Si además se utilizan las propias funciones de forma  $N_j$  como funciones peso (método de Galerkin) se sustituye la ecuación (7) por el sistema de ecuaciones,

$$\mathbf{M}\bar{c} + \mathbf{H}\mathbf{c} = \mathbf{K}\mathbf{c} + \mathbf{p} \quad (9)$$

donde  $\mathbf{c}$  es el vector de concentraciones nodales y las matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{K}$  y el vector  $\mathbf{p}$  vienen definidos por las expresiones,

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \quad (10)$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega} D \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega \quad (11)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \frac{DV^*}{RT} \nabla N_i \cdot \nabla s N_j d\Omega \quad (12)$$

$$p_i = \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q} d\Gamma \quad (13)$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que para plantear el sistema (9) es necesario conocer el gradiente de la tensión hidrostática. Si el estado tensional es fijo y conocido ese dato se puede determinar fácilmente; en caso contrario será necesario llevar en paralelo un cálculo de tensiones por el método de los elementos finitos y con la misma malla de elementos. El gradiente de la tensión hidrostática se determina por el método de los mínimos cuadrados, y a partir de los datos de tensiones hidrostáticas en los puntos de Gauss, interpolando una función cuyo orden dependerá de las características del elemento (para elementos cuadráticos es razonable una interpolación lineal para las tensiones hidrostáticas lo que supone un gradiente constante).

Las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  son simétricas y constantes mientras que la matriz  $\mathbf{K}$  no es ni simétrica ni constante ya que la distribución de tensiones puede ser función del tiempo.

El cálculo de estas matrices se realiza por integración numérica siendo muy importante la correcta elección del número de puntos de integración por elemento en cada caso dada la gran diferencia existente entre los órdenes de los distintos integrandos. Sin embargo la solución de compromiso consistente en usar la misma malla de 2 x 2 puntos de integración en

elementos planos de 8 nodos para todas las matrices tiene la ventaja de evitar que aparezcan matrices singulares en el proceso de solución simplificando simultáneamente el cálculo.

El sistema de ecuaciones (9) sólo permite resolver el problema de la difusión de hidrógeno. Sin embargo simultáneamente se va deformando el material con la consiguiente variación del estado tensional. Este problema de Mecánica de Sólidos, que también se resuelve mediante el método de los elementos finitos, está acoplado al de difusión a través de las ecuaciones (12) y (13). Pero este acoplamiento sólo se produce en un sentido ya que se puede suponer que la concentración de hidrógeno no altera las propiedades mecánicas (ecuaciones constitutivas) del material.

En tal caso es posible, para cada intervalo de tiempo, resolver en primer lugar el problema de tensiones para poder calcular el segundo miembro de las ecuaciones (9) como si se tratase de un vector de cargas. No es por lo tanto necesario extrapolar o predecir los valores de las tensiones al final de cada escalón de carga como se hace en otros problemas acoplados (Felippa & Park<sup>1960</sup>). Al contrario, antes de proceder a analizar cada intervalo del problema de difusión se conocen los valores de las tensiones en los dos extremos del intervalo por lo que es posible elegir la regla de integración temporal con el único condicionante de conseguir la máxima eficacia y estabilidad.

Las diferentes reglas de integración disponibles se pueden consultar en los múltiples tratados existentes sobre el método de los elementos finitos como por ejemplo en el de Zienkiewicz<sup>(1977)</sup>. Las más sencillas son las llamadas de dos puntos porque se basan en expresar la función incógnita, en este caso la concentración, en el intervalo de tiempo  $(t_n, t_{n+1})$  a partir únicamente de su valor en los extremos del intervalo mediante una expresión del tipo,

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{C}_n N_n + \mathbf{C}_{n+1} N_{n+1} \quad (14)$$

donde  $N_n$  y  $N_{n+1}$  son funciones de interpolación equivalentes a las funciones de forma del método de los elementos finitos. En este caso se trataría de funciones lineales definidas mediante,

$$\begin{aligned} N_n &= 1 - \xi \\ N_{n+1} &= \xi \end{aligned} \quad (15)$$

$$\xi = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{t - t_n}{\Delta t}$$

Aplicando el método de los residuos ponderados a la ecuación (9) y a lo largo del intervalo  $(t_n, t_{n+1})$  se plantea la ecuación,

$$\int_0^1 w (\mathbf{M}\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}\mathbf{c} - \mathbf{K}\mathbf{c} - \mathbf{p}) d\xi = 0 \quad (16)$$

en la que  $w$  representa una vez más a la función peso. La introducción en (16) de la expresión (14) y de otras similares para la matriz  $\mathbf{K}$  y para el vector  $\mathbf{p}$  permite llegar a la ecuación (Astiz<sup>1964</sup>),

$$\left[ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{H} \right] \mathbf{c}_{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \mathbf{c}_n + \mathbf{p}_{n+1} + \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{c}_{n+1} \quad (17)$$

Esta ecuación implícita permite determinar el vector de concentraciones de hidrógeno en el tiempo  $t_{n+1}$  a partir de datos de tensiones en el tiempo  $t_{n+1}$ . Este esquema de tipo de diferencia hacia atrás tiene además las ventajas de ser incondicionalmente estable y de no obligar a guardar los datos de tensiones en intervalos anteriores por lo que su implementación en ordenador es más sencilla.

La mecánica de resolución numérica del modelo de la tensión hidrostática se ha expuesto con cierto detalle ya que es trasladable a gran parte de los modelos que se describen a continuación.

## 2.2. Modelo de la Deformación Plástica

Este modelo, propuesto por Ochiai, Yoshinaga y Kikuta<sup>1975</sup> se basa en la evidencia de que los átomos de hidrógeno también se acumulan en las dislocaciones ya que a lo largo de ellas pueden encontrar zonas con importantes deformaciones volumétricas. Cuando un sólido está sometido a importantes deformaciones plásticas como por ejemplo en el fondo de una fisura, la cantidad de hidrógeno acumulada en las dislocaciones puede sobrepasar con diferencia a la cantidad acumulada en otras zonas haciendo de este proceso el dominante en el fenómeno de fragilización por hidrógeno.

En este caso ya no tendría sentido hablar de la concentración como de la cantidad de hidrógeno por unidad de volumen sino más bien como de la cantidad de hidrógeno por unidad de longitud de dislocación. Designando a la densidad de dislocaciones  $\Lambda$  (longitud de dislocaciones por unidad de volumen), se define por tanto una concentración efectiva,  $c^*$ , como,

$$c^* = c/\Lambda \quad (18)$$

Esta nueva concentración indicaría en cada punto la cantidad de hidrógeno disponible para ser transportado por difusión. Aplicando las leyes de Fick de la difusión a  $c^*$  se obtiene el flujo de hidrógeno como,

$$\mathbf{q} = -\gamma D \nabla c^* \quad (19)$$

en donde  $\gamma$  no es más que una constante de proporcionalidad que depende del material. Esta ecuación, comparable a la (2), permite intuir que la solución estacionaria será aquella en la que se uniformice el valor de  $c^*$ ; por lo tanto el hidrógeno tenderá a desplazarse hacia las zonas de mayor densidad de dislocaciones, es decir a aquellas en las que se produzcan las mayores deformaciones plásticas.

La aplicación de la segunda ley de Fick permite deducir la ecuación diferencial del fenómeno que será,

$$\frac{\partial c^*}{\partial t} = \frac{\gamma D}{\Lambda} \Delta c^* \quad (20)$$

en la cual  $\gamma$  y  $D$  son constantes pero la densidad de dislocaciones debe ser función de las coordenadas y posiblemente del tiempo. Una aproximación simplista puede consistir en postular que la densidad de dislocaciones es función lineal de la deformación plástica equivalente,

$$\Lambda = \alpha \bar{\epsilon}_p + \beta \quad (21)$$

De esta manera el problema de difusión queda acoplado al problema de Mecánica de Sólidos.

La ecuación (20) es la de difusión clásica salvo que con una difusividad aparente variable a lo largo del espacio y posiblemente a lo largo del tiempo si se consideran variables las deformaciones en el material.

Una forma elegante de resolver este problema consiste en utilizar un método variacional definiendo el siguiente funcional,

$$\chi = \int_{\Omega} \left[ \frac{\gamma D}{2} \nabla c^* \cdot \nabla c^* + \Lambda \frac{\partial c^*}{\partial t} c^* - q_a c^* \right] d\Omega \quad (22)$$

donde  $q_a$  es la carga de hidrógeno por unidad de volumen.

Al considerar variaciones en  $c^*$ ,  $\delta c^*$ , la condición  $\delta \chi = 0$  (funcional estacionario) implica que se cumpla en el volumen  $\Omega$  del material la ecuación diferencial (20). Para comprobarlo es suficiente aplicar el teorema de Green en forma semejante a como se hizo en el caso del modelo anterior (ecuación (7)). Otra consecuencia que se deduce de la condición  $\delta \chi = 0$  es la ecuación,

$$\int_{\Omega} q_a d\Omega = \int_{\Gamma} \gamma D \nabla c^* \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (23)$$

Esta ecuación obliga a que el contenido total de hidrógeno en el material permanezca constante lo cual equivale, en ausencia de fuentes internas, a imponer una condición de flujo nulo a lo largo del contorno. El método así planteado sólo permitiría estudiar procesos de redistribución de hidrógeno pero no de carga de hidrógeno a través de la superficie. Esta dificultad se puede obviar añadiendo al funcional  $\chi$  la integral de superficie que figura en el tercer miembro de la ecuación (23) con lo que se anularía la condición de balance global nulo; seguidamente las condiciones de contorno de tipo de Dirichlet (las más frecuentes en la práctica) se imponen directamente sobre la función incógnita  $c^*$  al no considerar en el proceso de solución más que aquellas funciones que cumplan,

$$c^* = \bar{c}^* \quad \text{en} \quad \Gamma_c \quad (24)$$

La solución de la ecuación (20) mediante el método de los elementos finitos se lleva a cabo expresando la concentración efectiva,  $c^*$ , mediante un vector de valores nodales tal como se hizo en la ecuación (8) para la concentración volumétrica. Al sustituir en (22) e imponer la condición de funcional estacionario se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{M}\dot{c}^* + \mathbf{H}c^* = \mathbf{p} \quad (25)$$

donde las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  y el vector  $\mathbf{p}$  están definidos mediante las expresiones,

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \Lambda N_j N_j d\Omega \quad (26)$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega \quad (27)$$

$$p_i = \int_{\Omega} q_a N_i d\Omega \quad (28)$$

Este sistema es muy semejante al obtenido para el modelo de la tensión hidrostática aunque más sencillo ya que no aparece el término equivalente a la matriz  $\mathbf{K}$  (ecuación (12)).

El esquema de integración temporal puede coincidir con el del modelo anterior por lo que no insistiremos sobre este punto.

### 3. MODELOS GENERALES

Los modelos anteriormente mencionados son muy restringidos en su ámbito de aplicación ya que se han deducido sobre la base de unas hipótesis de comportamiento muy concretas. Sin embargo la realidad física es muy compleja y se puede decir que ambos modelos sólo muestran una parte de esta realidad. Se hace por tanto necesario proponer otros modelos más generales que puedan llegar a englobar a los anteriores y que además sean capaces de describir con mayor precisión el fenómeno de la difusión de hidrógeno. Estos nuevos modelos se han empezado a proponer a partir del año 1980 y se pueden clasificar en tres grupos de acuerdo con Leblond y Dubois<sup>1963</sup>: modelos basados sobre la hipótesis de una distribución no uniforme de la solubilidad del hidrógeno, modelos de difusión con trampas y modelos de transporte por dislocaciones.

Seguidamente pasaremos a describir estos modelos y los métodos numéricos correspondientes.

#### 3.1. Modelo de la Solubilidad no Uniforme

En el fenómeno de la difusión y en el caso de que el material esté continuamente inmerso en el ambiente agresivo, la concentración de hidrógeno en cada punto crece de forma monótona hasta alcanzar un valor estacionario que se denomina solubilidad. La solubilidad depende de muchos parámetros: microestructura, temperatura, estado de tensiones y deformaciones, densidad de dislocaciones, etc. Por lo tanto, desde un punto de vista fenomenológico, puede resultar interesante plantear una ecuación diferencial cuya solución estacionaria sea precisamente la solubilidad. Dicha ecuación, semejante a la de Fourier, es

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot [D S \nabla (c/S)] \quad (29)$$

en donde  $S$  es la solubilidad.

En el caso del modelo de la tensión hidrostática es fácil comprobar que la solución estacionaria viene dada por,

$$c = c_0 \exp(V^* s / RT) \quad (30)$$

donde  $c_0$  es una concentración de referencia y que representa la concentración en el contorno (el medio agresivo) supuesto éste libre de tensiones. Por lo tanto se puede considerar a este valor como una solubilidad la cual introducida en (29) nos permite llegar a la ecuación diferencial del modelo de la tensión hidrostática (3). Este hecho demuestra que el modelo de la solubilidad no uniforme contiene el de la tensión hidrostática como caso particular.

En el caso del modelo de la deformación plástica la semejanza no es tan grande. En efecto dicho modelo predice una solución estacionaria que viene dada por la expresión,

$$S = \frac{c_0 \Lambda}{\gamma} \quad (31)$$

donde  $c_0$  tiene el mismo significado que para la ecuación anterior. En ese caso la ecuación del modelo (20) se puede escribir en términos de la solubilidad en la forma,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \left[ D \frac{\gamma}{\Lambda} S \nabla (c/S) \right] \quad (32)$$

equivalente a la (29) si se considera que la difusividad aparente no es uniforme sino que es función de la densidad de dislocaciones ( $D_{ap} = D\gamma/\Lambda$ )

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot [D_{ap} S \nabla (c/S)] \quad (33)$$

La solución numérica de la ecuación (33) o de la (29) en la que la difusividad puede ser no uniforme permitiría analizar mediante el mismo método todos los modelos presentados hasta ahora en este trabajo. Dicha solución se puede realizar por el mismo método seguido para el modelo de la tensión hidrostática, es decir por el de los residuos ponderados.

Considerando en principio condiciones de contorno de tipo Dirichlet y Neumann:

$$c = \bar{c} \quad \text{en } \Gamma_c \quad (34)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -D S \nabla (c/S) \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad \text{en } \Gamma_q \quad (35)$$

e incluyendo en la formulación solamente las segundas por estimar que las primeras se introducen directamente al no considerar más que aquellas aproximaciones que cumplan la ecuación (34), la ecuación de residuos ponderados del problema resulta,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_1 \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot [D S \nabla (c/S)] \right\} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_q} w_2 \left\{ \bar{q} - D S \nabla (c/S) \cdot \mathbf{n} \right\} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

donde  $w_1$  y  $w_2$  vuelven a ser las funciones peso. La formulación débil de la ecuación (36) se obtiene aplicando el teorema de Green a la primera integral. Tras igualar las funciones peso ( $w_1 = -w_2 = w$ ) se llega a la ecuación,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ w \frac{\partial c}{\partial t} + D \nabla w \cdot \nabla c - \frac{Dc}{S} \nabla w \cdot \nabla S \right] d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma_q} w \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} w D \left[ \nabla c - \frac{c}{S} \nabla S \right] \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (37)$$

Cuando se aproxima la función incógnita,  $c$ , mediante el método de los elementos finitos (ecuación 8) y usando las propias funciones de forma como funciones peso se obtiene el sistema de ecuaciones,

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}\mathbf{c} = \mathbf{K}\mathbf{c} + \mathbf{p} \quad (38)$$

idéntico en la forma al obtenido para el modelo de la tensión hidrostática (ecuación 9). En dicho sistema las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  son las mismas que las definidas anteriormente (ecuaciones 10 y 11). La matriz  $\mathbf{K}$  y el vector  $\mathbf{p}$  serán

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \frac{D}{S} N_i \nabla N_j \cdot \nabla S d\Omega \quad (39)$$

$$p_i = \int_{\Gamma_q} N_i q d\Gamma \quad (40)$$

en donde la integral de superficie extendida a lo largo de  $\Gamma_c$  ha desaparecido por anularse en esta parte del contorno las funciones peso.

De la exposición anterior se deduce que el método de análisis presentado para el modelo de la tensión hidrostática es absolutamente general e incluso es aplicable al modelo de la deformación plástica. Este método permite analizar cualquier condición de contorno (Dirichlet o Neumann) y la integración temporal se puede llevar a cabo mediante un esquema de recurrencia incondicionalmente estable como el presentado en la ecuación (17). Las únicas limitaciones son las inherentes a las hipótesis sobre las que se basa el planteamiento del modelo y concretamente la no consideración de la presencia de trampas.

### 3.2. Modelos de Difusión con Trampas

Existen evidencias experimentales de la existencia en el material de zonas de bajo potencial que se comportan como “trampas” para el hidrógeno y que ya fueron detectadas por Darken y Smith en 1949. Estas trampas suelen consistir en microfisuras, impurezas y dislocaciones y resulta muy difícil extraer el hidrógeno de dichas trampas cosa que sólo se consigue mediante un tratamiento a temperatura elevada. Estas trampas se manifiestan en la no linealidad del proceso de absorción de hidrógeno y en ocasiones por su irreversibilidad (ver por ejemplo en Gutiérrez-Solana y otros, <sup>1965</sup>).

Existen varios modelos de difusión que tienen en cuenta la presencia de trampas (McNabb & Foster,<sup>1963</sup>; Leblond & Dubois,<sup>1983</sup>; Astiz,<sup>1986</sup>. Todos ellos tienen muchas características comunes. En ellos se supone que el hidrógeno se reparte entre distintos lugares (la malla cristalina y los distintos tipos de trampas) pudiendo definirse concentraciones para

cada lugar de tal forma que la suma de todas ellas sea la concentración real de hidrógeno (en el supuesto de que se calcule la concentración respecto a un volumen común):

$$c = c_1 + c_2 + c_3 + \dots \quad (41)$$

donde el subíndice 1 representa a la malla cristalina y los demás a los distintos tipos de trampas. La segunda hipótesis consiste en suponer que el hidrógeno sólo se difunde a través de los lugares de tipo 1 (la malla) mientras que el contenido de hidrógeno en las trampas sólo se puede alterar a través de intercambios locales (el modelo de Leblond y Dubois es el más general y no recurre a esta hipótesis). Por ello se podrá escribir una ecuación de difusión de tipo clásico

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot [D \nabla c_1] \quad (42)$$

en la cual no se refieren las concentraciones a una solubilidad no uniforme ya que este efecto se tiene de alguna manera en cuenta en las trampas.

Finalmente existe un conjunto de ecuaciones que describe los intercambios locales de hidrógeno entre las trampas y la malla. Estas ecuaciones pueden ser no lineales como en el modelo de McNabb y Foster aunque es frecuente tomar, para  $(n - 1)$  trampas, una aproximación lineal del tipo,

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \sum_{j=2}^n a_{ij} c_j \quad (43)$$

en donde se supone que existe interacción entre todos los distintos lugares de localización de hidrógeno. En el modelo de Leblond y Dubois se añade al segundo miembro los términos correspondientes a la difusión que se puede producir en las trampas. En el modelo del autor de este trabajo se tiene en cuenta la existencia de niveles umbral y de saturación en el intercambio de hidrógeno entre las trampas y la malla.

La solución numérica de este problema pasa a cualquier caso por la consideración simultánea de las ecuaciones (42) y (43). Para ello, en primer lugar, es necesario definir en cada nodo de la malla de elementos finitos un conjunto de valores que serán las concentraciones  $c_i$ . Por lo tanto el vector de concentraciones nodales  $\mathbf{c}$  contendrá un mayor número de elementos. De cara a la presentación del método supondremos que está organizado por tipos de lugares,

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3, \dots]^T \quad (44)$$

siendo  $\mathbf{c}_i$  el vector de concentraciones nodales correspondientes al lugar (malla o trampa)  $i$ . La versión discretizada de la ecuación (42) se obtiene como caso particular de los modelos estudiados anteriormente,

$$\mathbf{M} \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{c}}_j + \mathbf{H} \mathbf{c}_1 = \mathbf{p} \quad (45)$$

Dado que las ecuaciones (43) expresan relaciones algebraicas lineales entre las distintas concentraciones, su versión matricial se escribe directamente sin ninguna aproximación:

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (46)$$

en donde, al ordenar las concentraciones por nodos y no por tipos de lugares,  $\mathbf{A}$  se convierte en una matriz en banda ya que se supone que no existe relación directa entre las concentraciones de dos puntos diferentes como no sea a través de la ecuación de difusión (42 y 43).

Combinando las ecuaciones (45) y (46) se obtiene un sistema de ecuaciones lineal que, en el caso de dos tipos de trampas sería:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{c}}_1 \\ \dot{\mathbf{c}}_2 \\ \dot{\mathbf{c}}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{21}\mathbf{I} & a_{22}\mathbf{I} & a_{23}\mathbf{I} \\ a_{31}\mathbf{I} & a_{32}\mathbf{I} & a_{33}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

Esta ecuación se puede hacer idéntica en su estructura a las obtenidas para los demás modelos (9) diagonalizando la primera matriz llegándose a la expresión,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{c}}_1 \\ \dot{\mathbf{c}}_2 \\ \dot{\mathbf{c}}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\sum a_{i1}\mathbf{M} & -\sum a_{i2}\mathbf{M} & -\sum a_{i3}\mathbf{M} \\ a_{21}\mathbf{I} & a_{22}\mathbf{I} & a_{23}\mathbf{I} \\ a_{31}\mathbf{I} & a_{32}\mathbf{I} & a_{33}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

en donde las matrices del primer miembro son simétricas y constantes por lo que son aplicables los mismos métodos de solución e integración temporal que se han descrito previamente.

#### 4. APLICACIONES

Hasta la fecha el trabajo de los investigadores ha estado centrado en la verificación de los modelos de difusión a través de los ensayos de permeabilidad siendo muy escasas las aplicaciones de dichos modelos a casos reales. El método aquí presentado se ha aplicado al modelo de la tensión hidrostática (Astiz,<sup>1987</sup>).

Como ejemplo de aplicación práctica se presenta el caso de una probeta cilíndrica entallada (Figura 1) a la que se aplica un alargamiento uniforme de 0,1 mm en sus extremos. El material es elasto- plástico con una ley tensión-deformación bilineal. La malla elementos consta de 181 nodos y 50 elementos cuadráticos de 8 nodos. La concentración se supone uniforme e igual a  $c_0$  en el instante inicial siendo todo el contorno impermeable al hidrógeno.

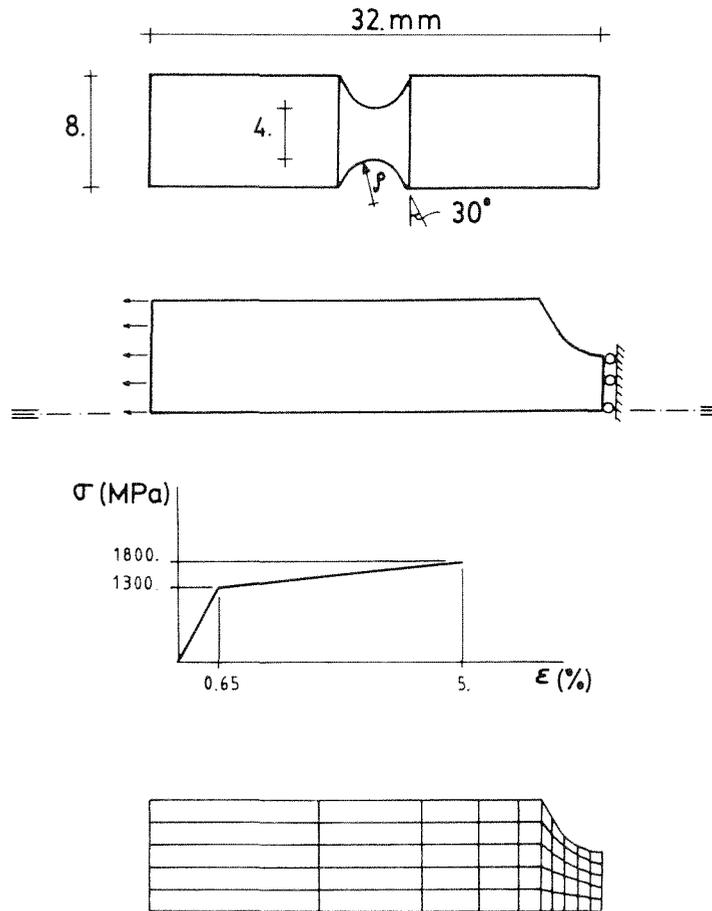


Figura 1. Características de la probeta entallada y del modelo

Los valores de las constantes  $D = 5.10^{-11} m^2/s$  y  $V^*/RT = 0,0008 m^2/MN$  son los correspondientes a aceros de alta resistencia (Piñero,<sup>1981</sup>).

El estado de tensiones hidrostáticas resultante presenta una zona interior de valores máximos que es la delimitada por las isolíneas de  $800 MPa$  en la Figura 2. En consecuencia el hidrógeno se concentrará principalmente en esta zona como se aprecia en la Figura 3 en donde se han representado las isolíneas de concentración de hidrógeno a largo plazo (estado de tensiones estacionario).

En Toribio<sup>1987</sup> pueden encontrarse más aplicaciones de este método para el modelo de la tensión hidrostática.

## 5. CONCLUSIONES

La principal conclusión que se deriva de este trabajo estriba en que es posible abordar el análisis de la mayor parte de los modelos de difusión propuestos hasta la fecha mediante

el mismo método numérico basado en los métodos de los elementos finitos y de Galerkin.

La determinación, en una probeta de ensayo o en una estructura real, de la distribución de hidrógeno permitirá predecir el alcance de la fragilización sufrida por el material en un medio agresivo. Por lo tanto será posible predecir con mayor precisión el tiempo y/o el nivel de cargas para los cuales se produce la rotura en procesos de corrosión bajo tensión y de corrosión-fatiga.

Sin embargo es de destacar que los modelos son todavía imperfectos y que se están proponiendo modelos que tienen en cuenta por ejemplo el transporte de hidrógeno por las dislocaciones es decir a través de un mecanismo completamente diferente al de la difusión lo que en su caso invalidaría el método propuesto.

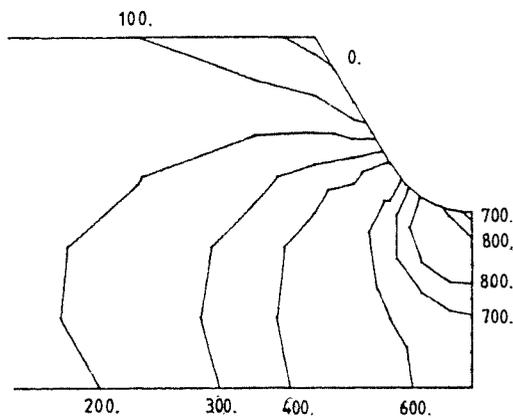


Figura 2. Isolíneas de tensión hidrostática (MPa)

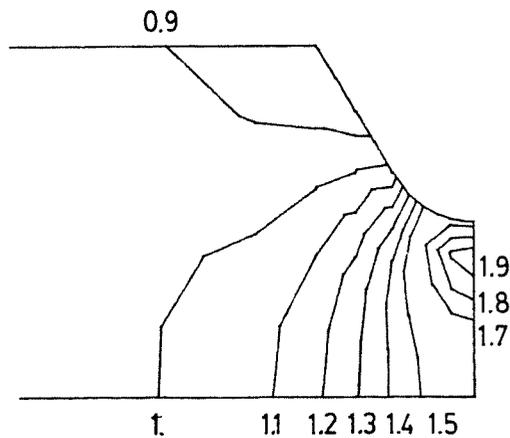


Figura 3. Isolíneas de concentración relativa de hidrógeno

REFERENCIAS

1. Astiz, M.A., *2nd. Int. Conf. Num. Meth. Non Linear Problems*, Barcelona, (1984).
2. Astiz, M.A., *2nd. Simp. Método Elementos Finitos*, Barcelona, (1986).
3. Astiz, M.A., *Num. Meth. Nonlinear Problems*, Pineridge Press, (1987).
4. Darken, L.S. & Smith, R.P., *Corrosion*, Vol. **5**, pp. 1, (1949).
5. Felippa, C.A. & Park, K.C., *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **24**, pp. 61, (1980).
6. Gutiérrez-Solana, F., *Tesis Doctoral*, Universidad Politécnica de Madrid, (1981).
7. Gutiérrez-Solana, F., Bernstein, I.M. & Thompson, A.W., *VI Asamblea General del CENIM*, (1985).
8. Hirth, J.P., *Met. Trans.*, Vol. **11A**, pp. 861, (1980).
9. Kazinczy, F., *J. Iron and Steel Institute*, Vol. **177**, pp. 85, (1954).
10. Leblond, J.B. & Dubois, D., *Acta Metallurgica*, (1983).
11. McNabb, A. & Foster, P.K., *Trans. Metall. Soc. A.I.M.E.*, Vol. **227**, pp. 618, (1963).
12. Ochiai, S., Yoshinaga, S. & Kikuta, Y., *Trans. ISIJ*, Vol. **15**, pp. 503, (1975).
13. Piñero, J.M., *Tesis Doctoral*, Universidad Politécnica de Madrid, (1981).
14. Toribio, J., *Tesis Doctoral*, Universidad Politécnica de Madrid, (1987).
15. Troiano, A.R., *Trans. ASM*, Vol. **52**, pp. 54, (1960).
16. van Leeuwen, H.P., *Engng. Fract. Mech.*, Vol. **6**, pp. 141, (1974).
17. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method", McGraw-Hill, (1977).

# VI - Fractura en Problemas Dinámicos

## MODELIZACION DE PROBLEMAS DE IMPACTO CON FRACTURA

JOSE MARIA GOICOLEA  
JOAQUIN MARTI  
RAUL CORTES  
y  
FRANCISCO BELTRAN

*PRINCIPIA, S.A.*  
*Velázquez, 94*  
*28006 Madrid*

### RESUMEN

*La modelización numérica de cuerpos sometidos a cargas dinámicas extremas exige por una parte procedimientos de cálculo que representen el comportamiento no lineal y la propagación de ondas, y por otra una descripción adecuada del proceso de fractura dinámica. En este trabajo exponemos en primer lugar las metodologías numéricas más corrientemente utilizadas para el análisis de problemas de dinámica rápida, centrándonos en esquemas explícitos y formulaciones que relacionan la tensión de Cauchy con la velocidad de deformación. A continuación discutimos los modelos de fractura dividiéndolos en modelos cuasiestáticos adaptados a condiciones dinámicas y modelos propiamente dinámicos. Por último, presentamos resultados de varios casos de impacto en los que se ilustra la aplicación de los modelos anteriores.*

### SUMMARY

*The numerical modeling of bodies under extreme dynamic loads requires analysis procedures that represent reliably the non-linear behaviour and stress-propagation regime, as well as an adequate description of the process of dynamic fracture. In this paper we present firstly the numerical methods more commonly used for analysis of fast loading problems, centred around explicit schemes with formulations based on Cauchy stresses and rate of deformation tensors. We then discuss fracture criteria, classified as quasi-static models*

*adapted for dynamic loading and dynamic models proper. Finally, we present results from several cases of impact in which the above models are applied.*

## 1. INTRODUCCION

En las últimas décadas, se ha manifestado un creciente interés por investigar y modelizar el comportamiento de diversos tipos de materiales bajo cargas extremas y velocidades altas de deformación. Este interés proviene de la necesidad de estudiar la seguridad de instalaciones y equipos ante posibles accidentes, problemas relacionados con los transportes, nuevos procesos de fabricación de materiales, y del campo militar. La gama de materiales que han sido investigados en relación con estos aspectos es bastante amplia, e incluye a metales y sus aleaciones, materiales compuestos, roca, y hormigón.

Un problema de impacto requiere no sólo un análisis adecuado del comportamiento dinámico de los materiales, incluyendo la propagación de ondas acústicas o de choque, sino que por lo general está asociado a grandes deformaciones y sollicitaciones extremas del material. Es necesario por lo tanto estudiarlo con modelos no lineales que representen la plasticidad y la fractura del material. Según las velocidades de deformación que se desarrollan en el material, será necesario o no considerar su influencia en el comportamiento constitutivo elemental. Debido a la complejidad intrínseca de los problemas de impacto sólo es posible efectuar un estudio detallado y riguroso de tales problemas mediante el análisis numérico. Un modelo de ordenador fiable y bien planteado es capaz de proporcionar información detallada sobre la evolución del problema, proveyendo así una manera de relacionar la mecánica de los medios continuos con los procesos que se desarrollan a nivel microestructural en el material. Así, se han desarrollado diversos programas de ordenador que tienen capacidad para atacar con efectividad los problemas de impacto entre cuerpos sólidos (Wilkins<sup>1975</sup>, Hageman y Walsh<sup>1971</sup>, Hallquist<sup>1979,1983,1987</sup>, Hancock<sup>1976</sup>, Johnson<sup>1981</sup>, Key y otros<sup>1978</sup>, Martí<sup>1981</sup>, Goicolea<sup>1985</sup>). Dichos programas tienen la capacidad de modelizar la plastificación y rotura de los materiales, y se encuentran en general dotados de algoritmos para detectar los contactos entre los cuerpos que colisionan.

No obstante, la fiabilidad de las predicciones numéricas debe también apoyarse en una adecuada representación del fenómeno de fractura dinámica de los materiales sometidos a condiciones de carga de impacto. Los programas citados anteriormente utilizan por lo general modelos de comportamiento derivados en su formulación básica para situaciones cuasiestáticas, aunque con extensiones para considerar los efectos de la velocidad de deformación. Esto puede ser adecuado para velocidades de deformación bajas, que en los materiales convencionales equivalen a impactos a velocidad menor que aproximadamente 300 m/s. Sin embargo, para velocidades de impacto altas, la fractura de los materiales progresa por la coalescencia de microdefectos que se han desarrollado independientemente, esto es, sin que sus respectivos campos tensionales lleguen a interactuar entre sí de un modo importante (Meyers y Aimone<sup>1983</sup>, Curran y otros<sup>1977</sup>, Seaman y otros<sup>1985</sup>). De ahí la dificultad en relacionar el proceso de fractura dinámica a muy altas velocidades de deformación con los parámetros convencionales de la mecánica de la fractura estática. Por esta razón, diversos autores (Curran y otros<sup>1977</sup>, Seaman y otros<sup>1975</sup>, Seaman y otros<sup>1985</sup>, Shockey y

otros<sup>1975</sup>, Ehrlich y otros<sup>1977</sup>) han recurrido a representaciones del fenómeno de fractura dinámica relativamente complejas, que hacen uso de una teoría de nucleación y crecimiento de microdefectos independientes. Por supuesto cabe hacer notar que, si bien dichas teorías pueden extenderse también a situaciones estáticas, su origen se encuentra en el estudio de casos dinámicos.

En el presente trabajo, describiremos primeramente las metodologías numéricas más corrientemente utilizadas hoy en día en la resolución de problemas no lineales de dinámica rápida. A continuación, pasaremos a describir algunos modelos específicos de fractura dinámica. Finalmente presentaremos varios ejemplos de interés para la modelización de procesos de impacto con fractura y penetración balística.

## 2. METODOLOGIAS NUMERICAS GENERALES

En este apartado se describen procedimientos numéricos para la resolución de problemas no lineales de dinámica rápida. Esta descripción resumida sirve para introducir el marco en el que se han de insertar los modelos específicos para la fractura dinámica. Es necesaria esta introducción puesto que, como se verá, la formulación empleada en este tipo de problemas es muy distinta de la de los modelos convencionales de Elementos Finitos.

En lo que sigue, la discusión está restringida a modelos de Elementos Finitos o de Diferencias Finitas mediante procedimientos de semi-discretización, esto es, utilizando discretizaciones independientes en los dominios del espacio y del tiempo, y con elementos de continuo. Para problemas de impacto con comportamiento no lineal y fractura, los modelos más adecuados son los que discretizan el continuo directamente mediante elementos bi o tri-dimensionales. Los programas basados en elementos estructurales del tipo viga o lámina (Belytschko y Tsai<sup>1982</sup>), llevan aparejadas hipótesis tales como que las secciones normales a la directriz permanecen planas y normales, que dejan de ser válidas cuando se producen deformaciones altamente no lineales y roturas puntuales. Existen también procedimientos numéricos simplificados que incorporan en el modelo un conocimiento previo, más o menos empírico, sobre los campos de tensiones y deformaciones (Ravid y Bodner<sup>1983</sup>). La validez de estos modelos está limitada a problemas específicos y no proporcionan metodologías generales de simulación y predicción.

Tanto los modelos de Diferencias Finitas como los de Elementos Finitos discretizan el continuo espacial mediante una malla. Los procedimientos de Diferencias Finitas no están restringidos necesariamente a una malla topológicamente regular como es la creencia extendida, sino que permiten topologías arbitrarias (Wilkins<sup>1975</sup>, Martí<sup>1981</sup>, Goicolea<sup>1985</sup>). La diferencia entre ambos métodos estriba en la utilización de funciones de interpolación en el caso de los Elementos Finitos. Sin embargo, en los problemas no lineales se emplean siempre elementos sencillos con interpolación lineal, lo que hace que las interpolaciones efectuadas por ambos métodos lleguen a ser equivalentes (Kunar y Minowa<sup>1981</sup>). La utilización de un esquema explícito de integración en el tiempo en ambos métodos produce algoritmos exactamente equivalentes pudiendo denominarse la formulación resultante de un modo genérico como de dominio finito.

En el análisis numérico de problemas de impacto, se hace necesario el empleo de

intervalos de tiempo pequeños, con el objeto de representar adecuadamente la propagación de las ondas de tensión o de choque (Zukas<sup>1982</sup>). Además, de ese modo es posible representar de una forma conveniente los cambios bruscos no lineales tanto geométricos como del material. Las ventajas que ofrecen los métodos de integración implícita en el tiempo radican en el hecho de que por ser incondicionalmente estables pueden emplearse en conjunción con grandes intervalos de integración en el tiempo. En el caso de tales esquemas de integración, para determinar el estado del sistema al final del intervalo es preciso resolver un sistema de ecuaciones simultáneas, debido al hecho de que las ecuaciones del movimiento se presentan acopladas. Esto lleva aparejado la realización de un elevado número de operaciones por cada ciclo computacional. Resulta evidente pues que las ventajas de la integración implícita desaparecen en nuestro caso.

Por el contrario, para la integración explícita es posible plantear las ecuaciones nodales del movimiento en forma desacoplada, con lo que sólo se efectúan aproximaciones locales. Así, la obtención de las velocidades nodales al final de cada intervalo de integración se efectúa de una manera directa y muy económica desde el punto de vista computacional. Aunque los esquemas de integración explícita en el tiempo son sólo condicionalmente estables, por lo que deben emplearse junto con intervalos de integración pequeños, ésta última limitación se adapta muy bien al análisis numérico de problemas de impacto, en que el empleo de pequeños intervalos de tiempo es una necesidad inherente al análisis. En la práctica, las formulaciones explícitas son considerablemente más robustas, al no depender de criterios de convergencia para la resolución de ecuaciones simultáneas, que siempre dan problemas cuando hay rotura o reblandecimiento. Por todas estas razones, los códigos de ordenador que se han desarrollado para el análisis numérico de problemas de impacto se basan generalmente en la integración explícita en el tiempo (Anderson<sup>1987</sup>).

Las maneras más frecuentemente usadas para representar el continuo en problemas con importantes cambios de geometría son dos: la formulación Lagrangiana y la formulación Euleriana (Malvern<sup>1966</sup>). En la formulación Lagrangiana, el continuo se representa mediante una malla que se encuentra adherida a él, ajustándose a las deformaciones del material. Por su parte, la formulación Euleriana considera una malla fija en el espacio como marco de referencia para describir el movimiento del material. La formulación Lagrangiana parece a primera vista la más conveniente desde el punto de vista computacional, ya que representa las condiciones de contorno de una manera directa, a la vez que permite seguir adecuadamente la historia del material contenido por cada celda, lo cual es de gran importancia cuando el comportamiento mecánico de los materiales pertinentes es función de su historia previa.

Por el contrario, en el caso de la formulación Euleriana, es preciso incluir en las ecuaciones términos adicionales de convección, que representan el flujo de material entre celdas vecinas (Zukas<sup>1982</sup>). Los contornos del continuo y las discontinuidades como las ondas de choque tienden a hacerse difusos a medida que progresan los cálculos. Sin embargo, la formulación Euleriana presenta ciertas ventajas para problemas que llevan aparejados una gran distorsión del continuo que se está modelizando.

La estabilidad de la integración explícita en el tiempo se encuentra condicionada a que el intervalo de integración sea menor que el tiempo que tardan las ondas de compresión en recorrer la menor distancia entre nodos de la malla. Si una malla Lagrangiana sufre una excesiva distorsión, el intervalo de integración debe a su vez reducirse de una manera

importante con el fin de asegurar la estabilidad de los cálculos. De este modo, el proceso computacional puede hacerse demasiado costoso. La distorsión de la malla puede causar otros problemas aún más graves, como son la falta de precisión en el cálculo para elementos muy distorsionados, o el impedimento cinemático para que se desarrollen ciertos modos de deformación. Un ejemplo de esto se ilustra en la Figura 4a. Cuando estos efectos llegan a dominar la solución, es necesario realizar un remallaje o, en los estudios de penetración, aplicar algoritmos de erosión (Johnson y Stryk<sup>1987</sup>, Belytschko y Lin<sup>1987</sup>) o de creación de nuevas superficies (Ringers<sup>1983</sup>). En casos extremos es preferible pasar directamente a una malla Euleriana, a pesar de las desventajas mencionadas anteriormente, al no presentar éstas problemas de distorsión (Zukas<sup>1982</sup>, Hancock<sup>1976</sup>).

El comportamiento mecánico de los materiales sólidos se puede dividir en una parte hidrostática y otra desviadora. La parte hidrostática viene gobernada en general por una ecuación de estado que relaciona la presión con el volumen y la energía interna o la temperatura. Las componentes desviadoras vienen gobernadas por leyes elásticas por debajo de un determinado nivel de tensiones, superado el cual se producen deformaciones plásticas.

Cuando se produce un impacto a alta velocidad, se desarrollan en los sólidos elevadas presiones hidrostáticas, siendo con frecuencia las componentes desviadoras de las tensiones pequeñas en relación con las anteriores. Esta ha sido la causa de que los primeros modelos numéricos para análisis de impacto, fueran los llamados códigos hidrodinámicos ("hydrocodes") de Diferencias Finitas desarrollados en los laboratorios nacionales de E.E.U.U., en los años 50. Posteriormente en los años 60, Wilkins añadió el tratamiento de la plasticidad (Wilkins<sup>1964</sup>) y Hallquist desarrolló en los 70 herramientas más prácticas basadas en la metodología de los Elementos Finitos (Hallquist<sup>1979</sup>).

Existen varios tipos de ecuaciones de estado que permiten representar de una manera satisfactoria el comportamiento del material, aún para presiones sensiblemente superiores a la resistencia de aquél. La expresión más simple para la ecuación de estado, válida para presiones moderadas (impactos a velocidad baja o media), es una ecuación termoelástica, definida como:

$$P = -K \ln(V/V_0) + 3K\alpha(T - T_0) \quad (1)$$

donde:

- $K$  es el módulo de compresibilidad,
- $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica,
- $V$  es el volumen del material,
- $V_0$  es el volumen de referencia,
- $T$  es la temperatura.

Cuando se generan presiones más elevadas es necesario utilizar ecuaciones de estado más apropiadas para altas presiones. Quizá la ecuación genérica más utilizada es una expresión polinomial del tipo

$$P = a(\eta - 1) + b(\eta - 1)^2 + c(\eta - 1)^3 + dE \quad (2)$$

donde

$a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son coeficientes empíricos,  
 $\eta = V/V_0$ ,  
 $E$  es la energía interna.

El comportamiento desviador se puede caracterizar mediante relaciones elásticas por debajo de la tensión de fluencia del material. La formulación más usual relaciona las tensiones desviadoras de Cauchy  $s_{ij}$  y las velocidades de deformación  $d_{ij}$ , definidas como:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (3)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (4)$$

donde:

$v_i$  es el vector velocidad,  
 las comas indican derivadas parciales,  
 $\sigma_{ij}$  es el tensor de tensiones de Cauchy

mediante una ley hipoelástica incremental:

$$\nabla s_{ij} = 2G (d_{ij} - \frac{1}{3} d_{kk} \delta_{ij}) \quad (5)$$

donde

$G$  es el módulo elástico de corte.  
 $\nabla$  es la derivada de Jaumann.

Superada la condición de fluencia del material se producen deformaciones plásticas. En el caso más sencillo, se emplea la teoría incremental de la plasticidad de Prandtl-Reuss, que establece la proporcionalidad entre la velocidad de deformación plástica y las tensiones desviadoras, de la forma:

$$d_{ij}^P = \lambda s_{ij} \quad (6)$$

$$d_{ij}^P = d_{ij} - d_{ij}^E \quad (7)$$

donde:

$d_{ij}^P$  son las velocidades de deformación plástica  
 $d_{ij}^E = \dot{s}_{ij}/2G$  son las velocidades de deformación elástica.  
 $\lambda$  es un multiplicador arbitrario

Las relaciones anteriores se ven satisfechas implícitamente en el método del retorno radial de las tensiones, propuesto por Wilkins<sup>1964</sup>. Con posterioridad, Krieg y Key<sup>1976</sup> han propuesto alguna modificación al método del retorno radial, y Simo y Ortiz<sup>1984</sup> han desarrollado un mecanismo de retorno para intervalos de carga grandes, que puede ser de aplicación en formulaciones totales de tipo hiperelástico. Sin embargo, en formulaciones incrementales explícitas, el método de retorno radial debido a Wilkins proporciona excelentes resultados.

La influencia de la velocidad de deformación y la temperatura se puede considerar en el valor de la tensión de fluencia del material como:

$$Y = Y_0(\epsilon_p) f_1(\dot{\epsilon}) f_2(T) \quad (8)$$

en que  $Y_0(\epsilon_p)$  es una función de la deformación plástica únicamente, y  $f_1(\dot{\epsilon})$  y  $f_2(T)$  son funciones de la velocidad de deformación y de la temperatura, respectivamente.

### 3. MODELOS DE FRACTURA DINAMICA

Para modelizar adecuadamente la fractura dinámica se necesitan dos ingredientes básicos:

- un criterio que establezca cuándo se produce la rotura y qué tipo de rotura es;
- una representación adecuada de la propagación de la fractura.

El criterio de rotura puede ser bien un criterio desarrollado para situaciones cuasiestáticas, o bien un criterio específico para procesos dinámicos. En cambio, la propagación de la fractura es un fenómeno esencialmente dinámico y debe ser modelizado como tal.

En este apartado describiremos primero los modelos basados en criterios cuasiestáticos, para pasar después a discutir criterios puramente dinámicos. La discusión sobre estos últimos está reducida a un marco más teórico en el nivel microestructural, ya que faltan hoy en día desarrollos de modelos prácticos en este orden.

Se consideran criterios cuasiestáticos los desarrollados para representar la fractura bajo carga lenta, en las que el tiempo no influye, aunque se les pueda añadir algún factor modificador, de forma que se ajusten bien a resultados experimentales a velocidades de deformación más elevada. En esta categoría se incluyen:

- rotura por exceder la deformación plástica crítica
- rotura por alcanzar una superficie de fallo a compresión
- otros criterios tensionales, como la densidad de energía de deformación crítica
- fisuración por superar la tensión de tracción admisible.

Un criterio de deformación plástica crítica representa una rotura dúctil, limitando las deformaciones de cortante que el material puede acomodar. Este criterio es apropiado para

modelizar materiales metálicos con cierta ductilidad. Se puede formular combinado con la deformación volumétrica, de forma que se considere también la influencia de la presión de confinamiento:

$$A\epsilon_{kk} + B\epsilon_p \leq 1 \quad (9)$$

donde  $A$  y  $B$  son parámetros del material, pudiendo ser  $A = 0$ . En este criterio, la influencia de la velocidad de deformación puede ser tomada en cuenta indirectamente a través de la dependencia sobre ella de la tensión de fluencia (ecuación 8). Esta dependencia transforma las ecuaciones de la plasticidad de Prandtl-Reuss (ecuación 6) en un modelo viscoplástico.

La especificación de una superficie de fallo en el espacio de las tensiones proporciona otro método para establecer la fractura. El concepto de superficie de fallo se considera aquí diferenciado de la superficie de fluencia, en cuanto que la primera representa una envolvente que establece el nivel de tensiones último del material, una vez alcanzado el cual se produce la pérdida de capacidad portante. Este criterio está ligado por lo general a una elasticidad no lineal (Ohtani y Chen<sup>1967</sup>) o a un endurecimiento plástico previo mediante superficies de fluencia con sucesivos módulos de endurecimiento (Mroz<sup>1967</sup>). Es corriente encontrar en la literatura cierta confusión entre los conceptos de superficie de fluencia y superficie de fallo, considerando la plastificación del material como el fallo o rotura del mismo. Esta simplificación no es válida si se quiere analizar el comportamiento posterior a la fluencia.

La utilización de superficies de fallo se ha extendido para estudiar la fractura dúctil del hormigón bajo condiciones de compresión (aplastamiento o "crushing"). Como ejemplos se pueden citar las superficies de Willam y Warnke<sup>1974</sup> y de Ottosen<sup>1977</sup>. La superficie de Willam y Warnke utiliza cinco parámetros y emplea secciones no circulares en el plano desviador compuestas por seis arcos elípticos abarcando  $60^\circ$  cada uno. Según el plano de las meridianas, las meridianas de tracción y compresión respectivamente se expresan por:

$$\frac{\tau_m}{f'_c} = a_0 + a_1 \frac{\sigma_m}{f'_c} + a_2 \left( \frac{\sigma_m}{f'_c} \right)^2 \quad (\text{para } \theta = 0^\circ) \quad (10a)$$

$$\frac{\tau_m}{f'_c} = b_0 + b_1 \frac{\sigma_m}{f'_c} + b_2 \left( \frac{\sigma_m}{f'_c} \right)^2 \quad (\text{para } \theta = 60^\circ) \quad (10b)$$

donde

$\tau_m$  es la tensión de corte medida en el plano desviador

$f'_c$  es la resistencia a compresión del material

$\sigma_m$  es la tensión hidrostática

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  son parámetros del material.

Otro criterio que ha sido utilizado para establecer la rotura del material se basa en un valor crítico de la densidad de energía elástica almacenada. La densidad de energía se puede descomponer en dos términos, de dilatación y distorsión, que son a su vez función de las tensiones:

$$W = W_1 + W_2 \quad (11a)$$

$$W_1 \text{ (dilatación)} = \frac{\sigma_m^2}{2K} \quad (11b)$$

$$W_2 \text{ (distorsión)} = \frac{\bar{\sigma}^2}{6G} \quad (11c)$$

donde

$W$  es la densidad de energía elástica por unidad de volumen  
 $\sigma_m, \bar{\sigma}$  son respectivamente la tensión hidrostática y la tensión efectiva de Von Mises  
 $K, G$  son los módulos elásticos de compresión y corte respectivamente.

La densidad de energía como criterio de fallo ha sido una idea clásica de la teoría de Resistencia de Materiales. Sih<sup>1973</sup> ha utilizado este concepto como criterio propagación de fracturas. Hay que mencionar que, al ser un criterio puramente tensional, no resulta especialmente adecuado para modelizar la fractura al corte o bajo compresión, en la que ocurre cierta ductilidad. Tampoco es un criterio que se adapte bien para tener en cuenta la dependencia del tiempo o la velocidad de deformación.

Sometidos a tracción, numerosos materiales exhiben una rotura frágil, que se desencadena al superar la tensión de tracción admisible por el material. Esta fractura se desarrolla como fisuras en planos normales a la dirección de la tensión principal de tracción máxima.

Existen dos procedimientos para tratar la fisuración en métodos numéricos de dominio finito. El primer procedimiento engloba a los modelos de fisura discreta (Ngo y Scordelis<sup>1967</sup>), que incorporan las discontinuidades geométricas de la grieta a la discretización global de la estructura. Para modelizar la singularidad de tensiones a veces se recurre a crear en el borde de la fisura elementos con funciones de interpolación especiales (Barsoum<sup>1976</sup>). Para modelizar la propagación de las fisuras discretas se necesitan remallajes constantes (Ingraffea y Saouma<sup>1985</sup>). La aplicabilidad de estos modelos se ciñe a situaciones cuasiestáticas y lineales, siendo inviables en cálculos dinámicos y no lineales como los que nos ocupan.

El segundo procedimiento es el de la fisura ficticia o distribuida (Hillerborg y otros<sup>1976</sup>, Bazant<sup>1986</sup>). Los desplazamientos relativos de la fisura se consideran repartidos sobre el elemento, convirtiéndose en deformaciones del mismo. Este procedimiento se adapta mejor a los cálculos dinámicos que el de la fisura discreta. Existen aún algunos interrogantes sobre la independencia de la dirección en la que se propagan las fisuras con respecto a la malla (Marchertas, Kulak y Pan<sup>1982</sup>).

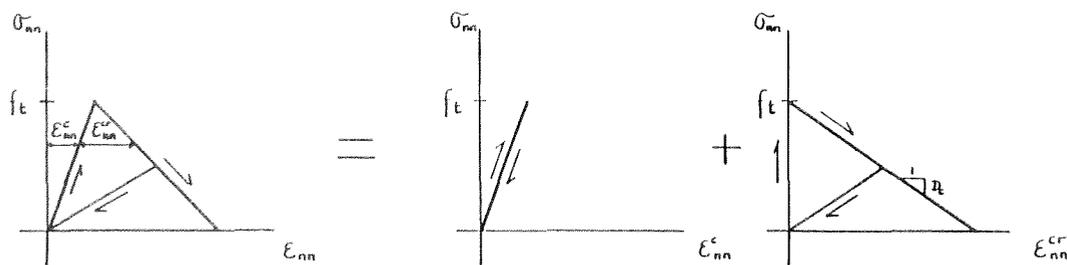
La fisuración se inicia cuando sobre algún plano se alcanza la tensión normal de tracción crítica,  $f_t$ . Un criterio basado en tensiones límite ocasiona ciertos problemas en códigos de integración explícita, debido al ruido numérico que acompaña a la respuesta en tensiones. Sin embargo parece inevitable caracterizar el inicio de la fisuración de este modo, que proporciona a la vez la dirección del plano de fractura. Una vez iniciada la fisuración el comportamiento mecánico se puede caracterizar por leyes tensión-deformación (Figura 1). En este caso, para obtener resultados independientes de la malla es necesario ajustar la rama de reblandecimiento de pendiente  $D_c$  con arreglo a la dimensión  $h$  del elemento sobre el que

se distribuye la fisura, de forma que se represente correctamente la energía necesaria para abrir la fisura por unidad de superficie,  $G_f$ :

$$D_c = - \frac{h f_t^2}{2G_f} \quad (12)$$

Otra posibilidad es emplear una ley que relacione directamente la tensión con la apertura de la fisura (desplazamiento), asumiendo una cierta función de distribución del desplazamiento a lo largo del elemento (Oliver y Fernández<sup>1987</sup>). La utilización de una ley tensión-desplazamiento tiene la ventaja de que es un dato experimentalmente objetivo e independiente de la malla. Sin embargo, en el caso de elementos sencillos con un punto de integración, este procedimiento no aporta ventaja alguna.

La utilización de un reblandecimiento por deformación como el utilizado en los modelos de fisura distribuida conduce a la paradoja de que al refinar la malla ( $h \rightarrow 0$ ) la rama de descarga (Figura 1) tiende a ponerse horizontal. En el límite, el módulo de reblandecimiento  $D_c$  se anula (ecuación 1), produciéndose el contrasentido de que un elemento fisurado mantenga intacta la resistencia a la tracción  $f_t$ . Esta circunstancia ha sido puesta de manifiesto con razonamientos termodinámicos por Ottosen<sup>1986</sup>.



- $\tilde{\sigma}_{nn}$  = tensión normal a la fisura
- $\epsilon_{nn}$  = deformación normal total
- $\epsilon_{nn}^c$  = deformación normal del continuo
- $\epsilon_{nn}^{cr}$  = deformación normal de la fisura

Figura 1. Relación tensión-deformación con ablandamiento, para el modelo de fisuración distribuida.

No existen generalizaciones de estos conceptos para el comportamiento dinámico del material, a pesar de que la fisuración distribuida se puede utilizar dentro de un contexto dinámico como un comportamiento independiente del tiempo al igual que la plasticidad. Este hecho y las inconsistencias planteadas anteriormente sobre el reblandecimiento y la malla crean algunas incertidumbres sobre la validez de la localización y propagación de fisuras así modelizadas en un cálculo dinámico.

Los modelos basados en criterios cuasiestáticos que se han presentado pueden ser utilizados dentro de cálculos dinámicos, con las salvedades e inconvenientes mencionados.

Antes de discutir el comportamiento microestructural en que se deberían basar los criterios de fractura dinámica, presentamos a continuación un modelo intermedio utilizado por Wilkins<sup>1966</sup> que posee una gran sencillez. Las hipótesis en que se basa son:

- Las fracturas se inician siempre en las superficies libres cuando se supera una tensión de tracción determinada.
- La relajación de las tensiones en un elemento fracturado se efectúa a lo largo de un intervalo de tiempo dado.
- Un elemento que no esté en una superficie libre sólo se puede fracturar si está a una distancia menor que  $V_c \Delta t$  de un elemento fracturado. Aquí  $V_c$  es la velocidad de propagación de la fractura y  $\Delta t$  es el tiempo transcurrido desde la fractura en el elemento origen.

Este modelo posee un cierto empiricismo, habiendo sido desarrollado de forma que se ajustase a resultados de impacto sobre materiales cerámicos. Sin embargo, aparte de su sencillez, posee la ventaja de utilizar el factor tiempo directamente en su formulación básica, por lo que puede resultar apropiado para modelos dinámicos. De hecho los resultados obtenidos por Wilkins en cerámicas así lo atestiguan (Wilkins<sup>1966</sup>).

En cuanto a criterios propiamente dinámicos de fractura, se hacen a continuación unas reflexiones sobre el proceso de rotura a nivel microestructural. Cuando un material es sometido a elevadas tensiones durante períodos muy breves usualmente no hay tiempo suficiente para que se manifieste la forma de rotura consistente en la propagación de macrofisuras, que suele ocurrir en condiciones estáticas.

Esta es la razón por la que frecuentemente un cuerpo sólido en el que se tienen macrofisuras presentes, sea capaz de soportar una carga muy elevada aplicada durante un tiempo muy breve, sin que las referidas macrofisuras se propaguen a raíz del proceso de carga. Sin embargo, puede ocurrir que el mismo cuerpo sólido se rompa si se le aplica una carga de menor magnitud pero aplicada más lentamente, por efecto de la propagación inestable de las macrofisuras. Así, resulta que las macrofisuras que son inestables cuando la velocidad de carga es baja, son estables a muy altas velocidades de carga. En vista de lo anterior, es claro que los modelos de fractura dinámica a muy altas velocidades de carga deben apartarse, al menos en principio, de las líneas de análisis que se emplean en la Mecánica de la Fractura clásica para problemas estáticos o de dinámica lenta. Tales modelos deben ajustarse a una descripción microestructural del proceso de fractura dinámica.

Existe una abundante información experimental que apunta en el sentido de que el proceso de fractura dinámica de los materiales se caracteriza por la nucleación y crecimiento de microdefectos en el material, cuya evolución se ve potenciada por la presencia de elevadas tensiones en el material. Dicha evolución se caracteriza por ser tan rápida que el proceso de nucleación y crecimiento de los microdefectos se verifica con independencia de las condiciones de su entorno inmediato. Esto se debe a que corrientemente el pulso de carga es tan rápido, que no se da lugar a que los campos tensionales asociados a

microdefectos vecinos interactúen entre sí, la fase final del proceso antes descrito consiste en la coalescencia de los microdefectos, para dar lugar a un plano de fractura. Tales microdefectos pueden ser microfisuras, que se desarrollan principalmente en el caso de fractura frágil, o microcavidades, que controlan el proceso de ruptura en materiales dúctiles. También, en el caso de los metales, la fractura dinámica puede ser controlada por la aparición de micro-bandas de cortante adiabático (Seaman y otros<sup>1975</sup>, Ehrlich y otros<sup>1977</sup>).

Es adecuado recalcar que los modelos de nucleación y crecimiento de microdefectos pueden también ser empleados para estudiar el caso de fractura estática de los materiales dúctiles. Sin embargo, tales aplicaciones han comenzado a realizarse más recientemente, estando el origen de dichos modelos íntimamente ligado al estudio de la fractura dinámica de los materiales.

En vista de lo dicho en los párrafos anteriores, resulta claro que la determinación experimental de las leyes de nucleación y crecimiento de los microdefectos en presencia de un campo de elevadas tensiones puede ser de gran ayuda con el fin de precisar una función de daño que caracterice el estado del material. Alternativamente, la referida función de daño puede definirse en forma más empírica, ajustando los valores de sus parámetros con el fin de que predigan correctamente la ruptura del material en situaciones simples de carga de impacto (Rajendran y Bless<sup>1965</sup>). Así, se ha dedicado un esfuerzo considerable a determinar la distribución experimental de tamaños y la cinética de nucleación y crecimiento de microdefectos al ser sometido el material a cargas impulsivas (Seaman y otros<sup>1975</sup>, Ehrlich y otros<sup>1977</sup>, Curran y otros<sup>1977</sup>, Seaman y otros<sup>1965</sup>).

En general, podemos expresar la ley de la nucleación de microdefectos como la suma de dos términos, uno de ellos relacionado con el proceso de difusión de vacancias en el material potenciado por las elevadas tensiones de tracción presentes, y un segundo término que representa la creación de microdefectos por un efecto puramente mecánico, relacionado con la ruptura de enlaces atómicos (Curran<sup>1982</sup>).

Por su parte, se ha verificado experimentalmente que las distribuciones de tamaños de microdefectos del material, se ajustan relativamente bien a una distribución exponencial. Además, la velocidad de crecimiento de los microdefectos suele ser proporcional a su tamaño actual y a una función lineal de la tensión externa aplicada. Esto último garantiza que la forma funcional de la distribución estadística de tamaños se mantiene inalterada en el tiempo (Curran y otros<sup>1977</sup>).

La fase final del proceso de fractura dinámica consiste simplemente en la coalescencia de los microdefectos que se han desarrollado. Cuando los defectos en cuestión son microfisuras o microbandas de cortante adiabático, la intersección reiterada de microdefectos da lugar a la fragmentación del material en pequeños trozos, cuyo tamaño se encuentra relacionado con la distancia entre microdefectos (Curran<sup>1982</sup>).

Existen dos maneras de considerar los procesos antes descritos al modelizar numéricamente la fractura dinámica de los materiales. La primera de ellas, consiste en incorporar los fenómenos de daño en una variable interna que da una medida del progreso del daño sufrido por el material (Curran<sup>1982</sup>). Por otra parte, también es posible considerar una distribución inicial de microdefectos en cada celda computacional y analizar su evolución en el tiempo, según planos definidos por distintas direcciones, haciendo uso de las relaciones obtenidas experimentalmente para la nucleación y el crecimiento de los microdefectos. Esta

última alternativa es bastante más costosa computacionalmente y plantea ciertos problemas de aplicación por la forma ambigua en que se encuentran definidos algunos de los parámetros de los modelos de nucleación y crecimiento antes referidos (Seaman y otros<sup>1975</sup>, Ehrlich y otros<sup>1977</sup>, Curran y otros<sup>1977</sup>, Seaman y otros<sup>1985</sup>).

Por último, es necesario mencionar que el nivel de conocimiento experimental o de desarrollo de modelos para fractura dinámica es aún inadecuado. Es necesario realizar más trabajo experimental y teórico en esta dirección con vistas a obtener modelos coherentes y fiables.

Mientras tanto, la solución de compromiso de utilizar criterios cuasiestáticos modificados puede ser aconsejable, considerando la mayor información existente para caracterizar dichos modelos.

#### 4. ANALISIS NUMERICO DE ALGUNOS PROBLEMAS DINAMICOS CON FRACTURA

Presentaremos por último algunos ejemplos que ilustran la aplicación de la metodología numérica y los modelos de fractura mencionados anteriormente.

Los metales pueden exhibir una elevada ductilidad antes de la fractura. En la Figura 2 se presenta un análisis de impacto de tuberías de acero resuelto con DYNA3D en donde se produce un comportamiento altamente no lineal, debido por un lado a las elevadas deformaciones plásticas y por otro a la evolución de las superficies de contacto y las grandes deformaciones.

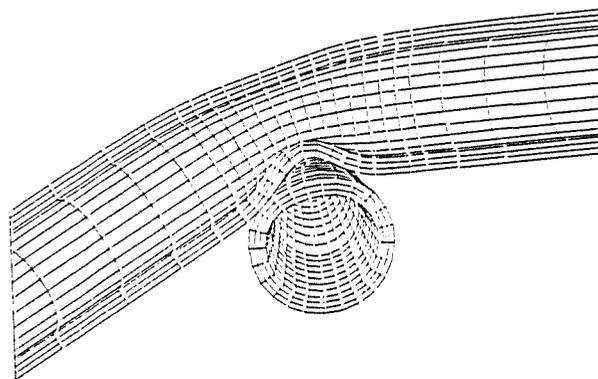


Figura 2. Simulación numérica del impacto de tuberías de acero. empleando el programa DYNA3D

El ejemplo siguiente ilustra el impacto de un avión sobre la contención de hormigón armado de una central nuclear. Se muestra un cálculo bidimensional aximétrico (Figura 3a) representando el impacto vertical sobre el ábside de la semiesfera, y un cálculo tridimensional (Figura 3b) para el caso de impacto horizontal sobre la parte cilíndrica de la contención. Los análisis fueron realizados con los códigos PR2D (Goicolea<sup>1985</sup>) y PR3D (Martí<sup>1981</sup>),

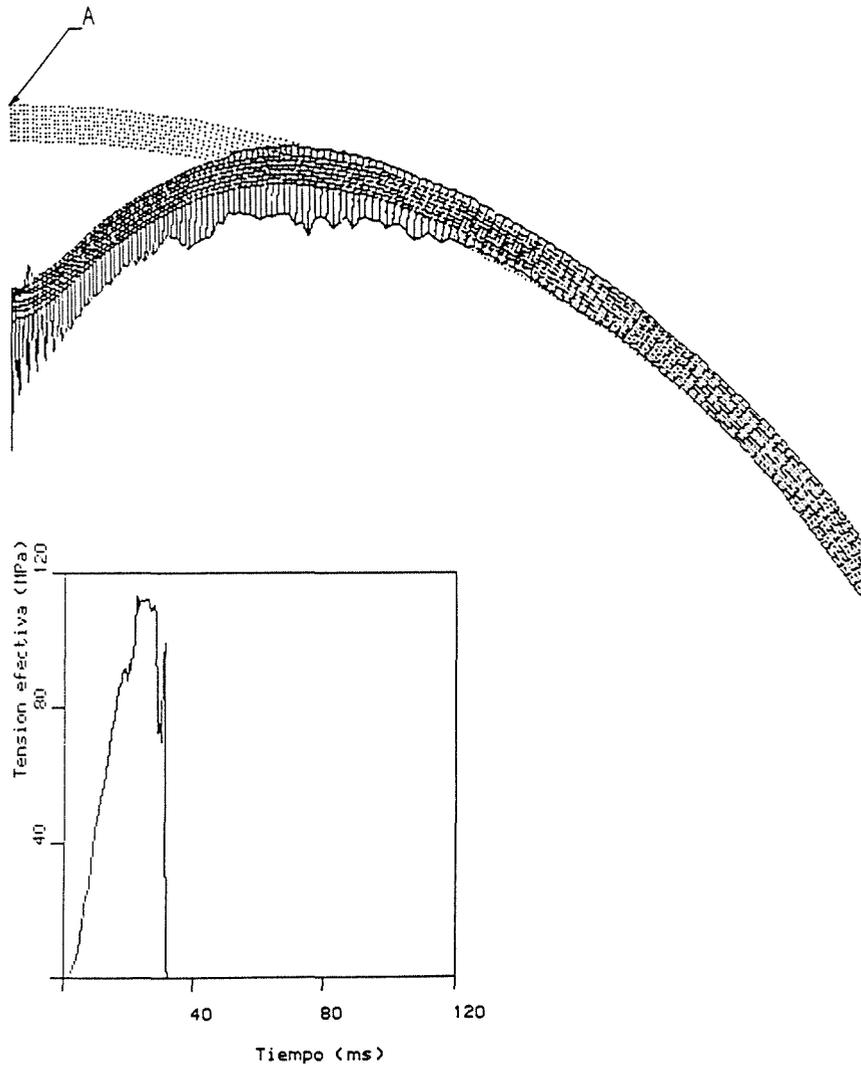


Figura 3.a. Impacto de avión sobre el ábside del domo de la contención de hormigón de una central nuclear (Análisis axisimétrico con PR2D). La malla inicial se muestra punteada, y en línea continua la configuración deformada a los 40ms. (desplazamientos verticales multiplicados por 50). Los grandes desplazamientos que se observan en la parte interior del domo se deben al desprendimiento del recubrimiento de hormigón. La figura del recuadro muestra la historia de tensión efectiva en un punto que ha sufrido rotura (punto A señalado en la figura).

modelizando las armaduras de forma segregada mediante elementos barra. El material fue representado mediante leyes elastoplásticas con superficie de fluencia de Drucker-Prager, incorporando endurecimiento, rotura frágil y rotura a compresión. El resultado de estos análisis indicó que, aunque se produjo fisuración muy extendida y rotura localizada en el

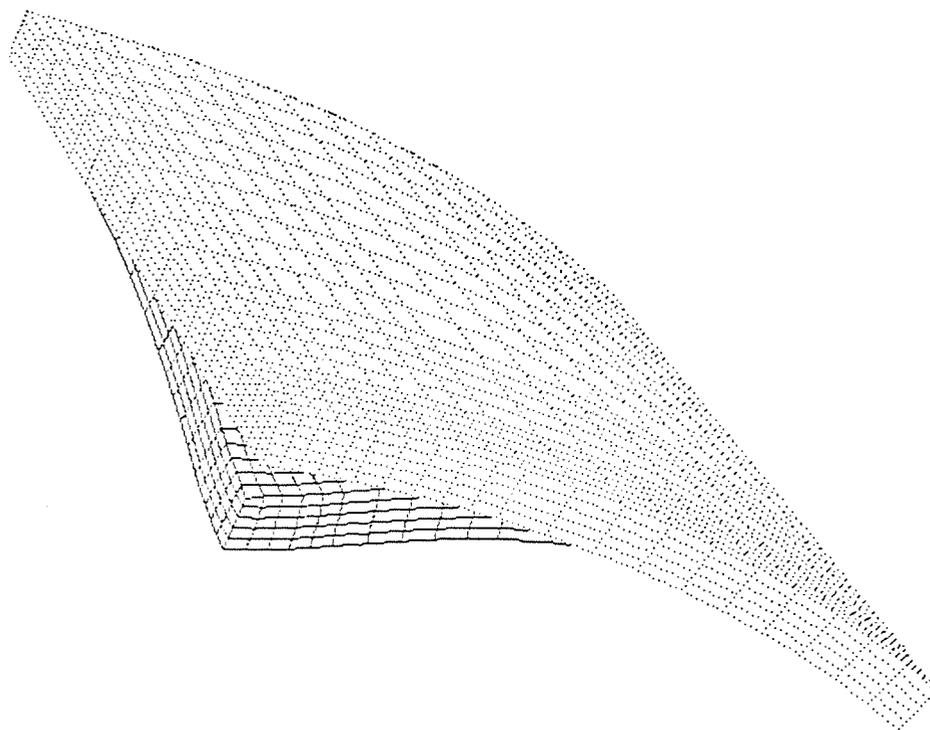


Figura 3.b. Impacto de un avión sobre la parte cilíndrica de la contención de hormigón de una central nuclear (Análisis tridimensional con PR3D). La malla inicial se muestra punteada, y en línea continua la configuración deformada a los 60ms (desplazamientos multiplicados por 20).

hormigón, las armaduras no alcanzaron la deformación plástica de rotura, manteniendo por tanto la integridad estructural.

La modelización de fenómenos de balística terminal exige representar no sólo el proceso de fractura en sí mismo, sino la penetración del proyectil a través del material degradado. En la Figura 4 se presenta un instante de la evolución del impacto de un proyectil de wolframio sobre un blanco de acero, realizado con el programa ARMI (Principia<sup>1987</sup>) con dos modelizaciones distintas. En ambos modelos se produce la fractura de los elementos cuando sobrepasan la deformación plástica crítica, manteniendo únicamente la resistencia a compresión hidrostática que correspondería al material degradado. En el primer caso (Figura 4a) los elementos rotos se mantienen como parte de la malla, lo que a partir de determinado momento ocasiona problemas debido a la excesiva distorsión de aquéllos. Estos problemas son de dos tipos; por una parte, al tratarse de un cálculo explícito, el intervalo de tiempo de integración se reduce enormemente para una malla muy distorsionada, elevando así el coste computacional. Por otra parte, en la Figura 4a se puede ver que el contacto entre ambos cuerpos se produce a través de tan sólo uno o dos elementos de lados rectos. Esto impone restricciones de tipo cinemático a la evolución del problema que son poco realistas.

La utilización de un algoritmo de erosión en este mismo problema (Figura 4b) permite una modelización más apropiada del mecanismo de penetración. La idea de este algoritmo

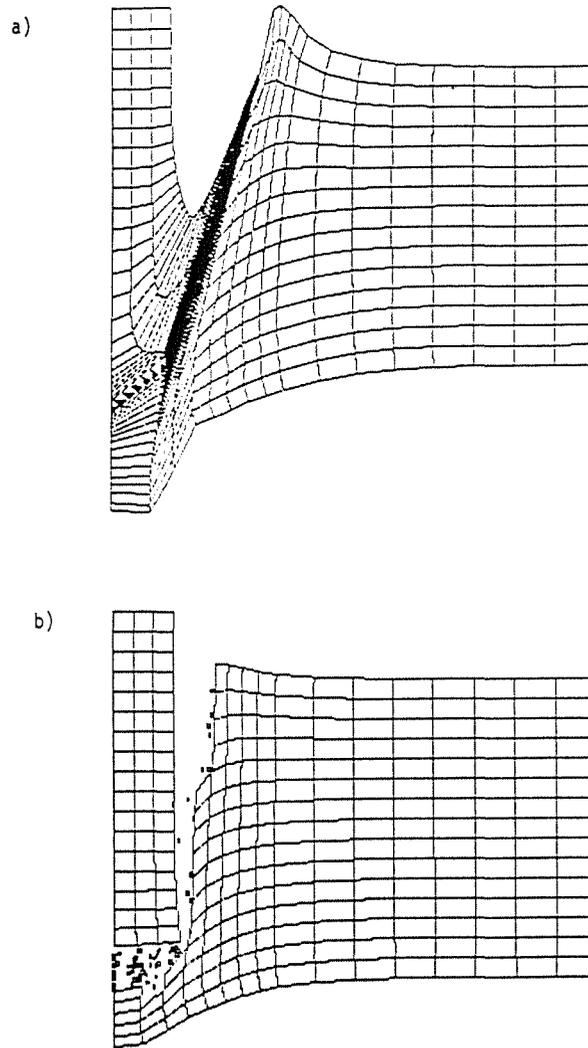


Figura 4. Impacto de un proyectil de wolframio sobre un blanco de acero realizado utilizando el programa ARMI. (a) sin emplear algoritmos de erosión. (b) empleando algoritmos de erosión.

es eliminar los elementos rotos de la malla cuando las tensiones se han relajado por debajo de un cierto umbral. Cada vez que se elimina un elemento hay que recomponer la malla para que el modelo considere las nuevos elementos externos susceptibles de entrar en contacto. La masa y el momento de las zonas erosionadas se conservan asociados a nodos libres que siguen interaccionando con las superficies del material intacto. El diámetro del cráter producido utilizando la erosión es sensiblemente menor que en el otro caso, lo que concuerda con resultados de experimentos balísticos.

Un método alternativo para representar la penetración es el de la "conectividad nodal

## MODELIZACION DE PROBLEMAS DE IMPACTO CON FRACTURA

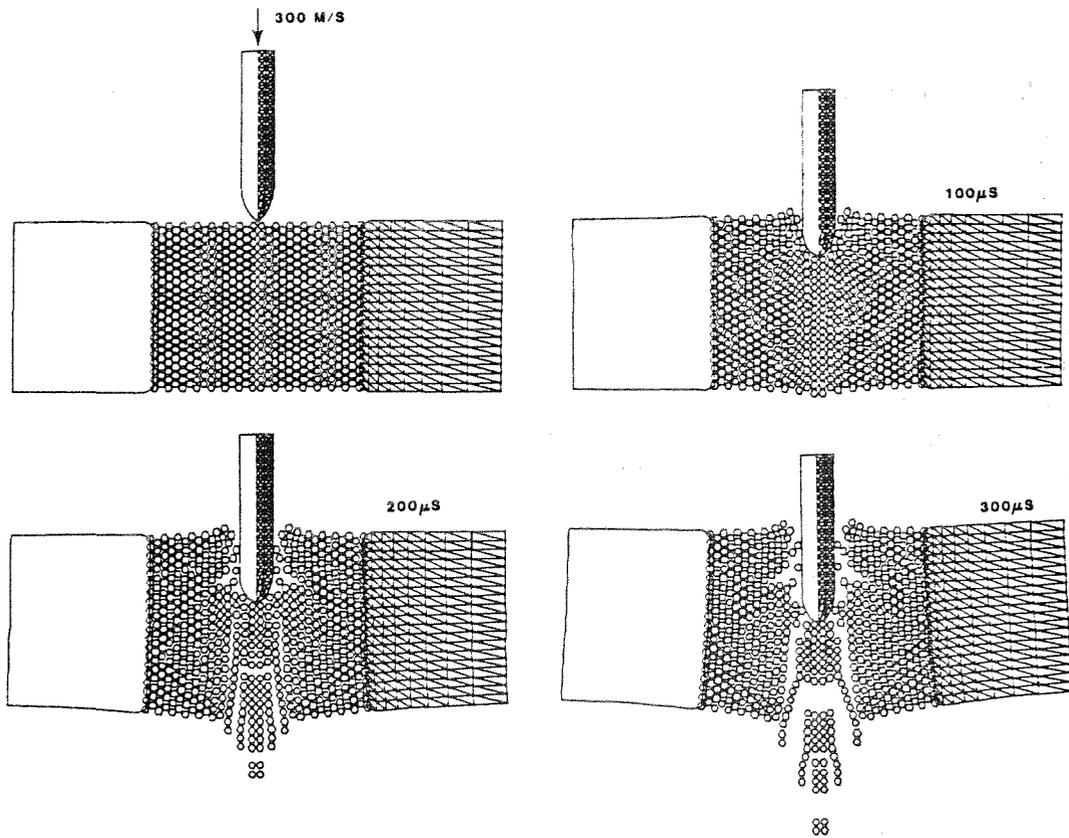


Figura 5. Impacto de un proyectil de acero sobre un blanco de hormigón, analizado empleando la técnica de conectividad nodal variable (de Johnson, Stryk y Dodd<sup>1966</sup>).

variable", presentado recientemente por algunos autores (Johnson y otros<sup>1966</sup>). Dicho método consiste en representar el material por medio de discos o de esferas flexibles, ligadas por fuerzas de separación o de atracción que dependen de su posición relativa. Se considera que los enlaces entre discos pueden romperse si su separación excede un valor límite. El programa ha de seguir pues la pista de los nodos a los que está conectado un nodo dado en cada instante. En la Figura 5 se muestra un caso en el que se ha empleado esta técnica, correspondiente al impacto de un proyectil de acero sobre un blanco de hormigón. Obsérvese que sólo se ha empleado conectividad nodal variable en la zona más inmediata al impacto, que es la que experimenta las mayores distorsiones.

El algoritmo recién descrito, aunque aumenta la eficiencia del programa, presenta aún ciertos problemas de precisión. En efecto, si bien en algunos casos los resultados con él obtenidos han sido correctos, en otras situaciones se ha manifestado una tendencia artificial al atezamiento o a la fisuración del material.

## 5. CONCLUSIONES

La modelización de problemas de dinámica rápida con fractura está asociado a la propagación de ondas y a fenómenos altamente no lineales, siendo los procedimientos de solución más adecuados para estos problemas los modelos explícitos de elementos o diferencias finitas.

La representación de la fractura del material se puede realizar bien mediante la extensión a casos dinámicos de criterios cuasiestáticos de fractura, o bien mediante criterios específicos de procesos dinámicos. Los criterios cuasiestáticos pueden proporcionar resultados aceptables para velocidades medias o bajas de carga, no siendo adecuados para altas velocidades. Es necesario más trabajo en la caracterización de los procesos de fractura dinámica a altas velocidades de deformación, ya que la información es aún escasa y los modelos de que se dispone hoy en día son de aplicación compleja. También se requiere mayor información sobre procesos de fractura en nuevos materiales como los cerámicos o los compuestos, de uso cada vez más extendido.

Por último, se han presentado ejemplos en los que se ilustra la aplicación de modelos explícitos a impactos con fractura, abarcando velocidades bajas, medias y altas, en materiales metálicos y hormigón armado. Los nuevos algoritmos de erosión propuestos permiten una modelización más adecuada de los procesos de impacto con penetración, aunque requieren aún cierto desarrollo para garantizar la precisión de los resultados.

## REFERENCIAS

- . Anderson, Ch.E., "An Overview on the Theory of Hydrocodes", *Int. J. Impact Engng.*, Vol. **5**, pp. 33-59, (1987).
- . Bazant, Z.P., "Mechanics of Distributed Cracking", *Appl. Mech. Rev.*, ASME, Vol. **39**, pp. 675-705, (1986).
- . Barsoum, R.S., "On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **10**, pp. 25-37, (1976).
- . Belytschko, T. y Tsai, C.S., "WHAMSE- A Program for Three-Dimensional Structural Dynamics", *Report NP-2250*, North-Western University, (1982).
- . Belytschko, T. y Lin, I.J., "A Three-Dimensional Impact-Penetration Algorithm with Erosion", *Computers & Structures*, Vol. **25**, pp. 95-104, (1987).
- . Curran, D.R., "Dynamic Fracture", en "*Impact Dynamics*" (J.A. Zukas, T. Nicholas, H. F. Swift, L. B. Greszczuk y D.R. Curran, Eds.), John Wiley & Sons, New York (USA), (1982).
- . Curran, D.R., Seaman, L. y Shockey, D.A., "Dynamic Failure in Solids", *Physics Today*, Vol. **30**, pp. 46-55, (1977).
- . Erlich, D.C., Seaman L. y Shockey, D.A., "Development and Application of a Computational Shear Band Model", *SRI Report, Project PYU 5084*, (1977).
- . Goicolea, J., "PR2D - An Explicit Finite Difference Non-Linear Thermomechanical Code. User's Guide", *Report CE-85-04*, Dept. of Civil Engineering, King's College, University of London, (1985).
- . Hageman, L.J. y Walsh, J.M., "HELP, a Multi-Material Eulerian Program for Compressible Fluid and Elastic-Plastic Flow in Two Dimensions and Time", System,

- Science and Software, La Jolla (USA), *Report 35R-350*, (1971).
- Hallquist, J.O., "NIKE2D: An Implicit Finite Deformation Finite Element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of Two-Dimensional Solids", Lawrence Livermore Laboratory, University of California, *Report UCRL-52678*. (1979).
- Hallquist, J.O., "Theoretical Manual for DYNA3D", Lawrence Livermore Laboratory, University of California, *Report UCID-19401*, (1983).
- Hallquist, J.O., "User's Manual for DYNA2D - An Explicit Two-Dimensional Hydrodynamic Finite Element Code with Interactive Rezoning and Graphical Display", Lawrence Livermore Laboratory, University of California, *Report UCID-18756, Rev. 3.*, (1987).
- Hancock, S.L., "Finite Difference Equations for PISCES-2DELK", Physics International Company, *Report TCAM-76-2*, (1976).
- Hillerborg, A., Modeer, M. y Petersson, P.E., "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. **6**, pp. 773-782, (1976).
- Ingrassia, A.R. y Saouma, V., "Numerical Modelling of Discrete Crack Propagation in Reinforced and Plain Concrete", en "*Fracture Mechanics of Concrete*", (G.C. Sih y A. Di Tommaso, Eds.), pp. 141-170, (1985).
- Johnson, G.R., "Recent Developments and Analysis Associated with the EPIC-2 and EPIC-3 Codes" en "*1981 Advances in Aerospace Structures and Materials*", (S.S. Wang y W. J. Renton, Eds.), ASME, pp. 142-147, (1981).
- Johnson, G.R., Stryk, R.A. y Dodd, J.G., "Dynamic Lagrangian Computations for Solids with Variable Nodal Connectivity for Severe Distorsions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **23**, pp. 509-522, (1986).
- Johnson, G.R. y Stryk, R.A., "Eroding Interface and Improved Tetrahedral Element Algorithms for High-Velocity Impact Computations in Three-Dimensions", *Int. J. Impact Eng.*, Vol. **5**, pp. 411-421, (1987).
- Key, S.W., Beisinger, Z.E. y Krieg, R.D., "HONDO II - A Finite Element Code for the Large Deformation Dynamic Response of Axisymmetric Solids", Sandia National Laboratories, Albuquerque (USA), *Report 78-0422*, (1978).
- Krieg, R.D. y Key, S.W., "Implementation of a Time Independent Plasticity Theory into Structural Computer Programs" en "*Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects*", AMD, Vol. **20**, ASME, (1976).
- Kunar, R. y Minowa, N., "A Comparison Between Finite Element and Finite Difference Explicit Formulation for Triangular and Quadrilateral Plane Strain Elements", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. **5**, pp. 217-224, (1981).
- Malvern, L.E., "*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*", Prentice Hall, Englewood Cliffs (USA), (1968).
- Marchertas, A.H., Kulak, R.F. y Pan, Y.C., "Performance of the Blunt Crack Approach Within a General Purpose Code", en "*Nonlinear Numerical Analysis of Reinforced Concrete*", ASME, (1982).
- Martí, J., "PR3D - Theoretical Basis (Version 1P-1)", Principia Mechanica Limited, London, *Report PR-TN-6*, (1981).
- Meyers, M.A. y Aimone, C.T., "Dynamic Fracture (Spalling) of Metals", *Progress in Mat. Sci.*, Vol. **28**, pp. 1-96, (1983).
- Mroz, Z., "On the Description of Anisotropic Workhardening", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **15**, pp. 163-175, (1967).

- Ngo, D. y Scordelis, A.C., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams", *ACI Journal*, Vol. **64**, pp. 152-163, (1967).
- Ohtani, Y.C. y Chen, W.F., "Hypoelastic-Perfectly Plastic Model for Concrete Materials", *J. Eng. Mech.*, ASCE, Vol. **113**, pp. 1840-1860, (1987).
- Oliver, J. y Fernández, J.R., "Consideraciones sobre los Modelos Numéricos de Distribución para el Análisis de la Fisuración del Hormigón", *Met. Num. Calc. Dis. Ing.*, Vol. **3**, pp. 343-368, (1987).
- Ottosen, N.S., "Failure and Elasticity of Concrete", Danish Atom. Energy Comm. Res. Establ., Riso Eng. Dept., Riso-M-1801, Roskilde, Dinamarca, (1977).
- Ottosen, N.S., "Thermodynamic Consequences of Strain Softening in Tension", *J. Eng. Mech.*, ASCE, Vol. **112**, pp. 1152-1164, (1986).
- Principia, S.A., "Manual de Usuario del Programa ARMI", Principia S.A., Madrid, (1987).
- Rajendran, A.M. y Bless, S.J., "High Strain Rate Behaviour", AFWAL-TR-85-4009,(1985).
- Ravid, M. y Bodner, S.R., "Dynamic Perforation of Viscoplastic Plates", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. **21**, pp. 377-591, (1983).
- Ringers, B.E., "New Sliding Surface Techniques Enable Lagrangian Code to Handle Deep Target Penetration/Perforation Problems" en "*Computational Aspects of Penetration Mechanics*", (J. Chandra y J.E. Flaherty, Eds.), Springer-Verlag, Berlin, (1983).
- Seaman, L., Shockey, D.A., Curran, D.R. y Tokheim, R.E., "Development of a Shear Band Model for Fragmentation in Exploding Cylinders", *SRI Report, Project PYU 3503*, (1975).
- Seaman, L., Curran, D.R. y Murri, W.J., "A Continuum Model for Dynamic Tensile Microfracture and Fragmentation", *J. Appl. Mech.*, Vol. **52**, pp. 593-600, (1985).
- Shockey, D.A., Curran, D.R. y de Carli, P.S., "Damage in Steel Plates from Hypervelocity Impact; I-Physical Changes and Effects of Projectile Material", *J. Appl. Phys.*, Vol. **46**, pp. 3766-3775, (1975).
- Sih, G.C., "Some Basic Problems in Fracture Mechanics and New Concepts", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **5**, pp. 365-377, (1973).
- Simo, J.C. y Ortiz, M., "A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations", Brown University, Division of Eng., Providence, R.I. 02912, (1984).
- Wilkins, M.L., "Calculations of Elastic-Plastic Flow", en *Methods of Computational Physics*, Vol. **3**, (B. Adler, Ed.), Academic Press, New York (USA), (1964).
- Wilkins, M.L., "Mechanics of Penetration and Perforation", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. **16**, pp. 793-807, (1968).
- Wilkins, M.L., "A Method for Computer Simulation of Problems in Solid Mechanics and Gas Dynamics in Three Dimensions and Time", Lawrence Livermore Laboratory, University of California, *Report UCRL-51574*, (1975).
- Willam, K.J. y Warnke, E.P., "Constitutive Model for the Triaxial Behaviour of Concrete", Int. Assoc. Bridge Struct. Eng. Sem. Concr. Subjected Triaxial Stresses, Bergamo, Italia, Int. Assoc. Bridge Struct. Eng. Proc., Vol. **19**, pp. 1-30, (1974).
- Zukas, J.A., "Numerical Simulation of Impact Phenomena", en "*Impact Dynamics*", (J.A. Zukas, T. Nicholas, H.F. Swift, L.B. Greszczuk y D.R. Curran, Eds.), John Wiley, New York, (1982).

## VII - Temas Específicos

### ESTUDIO DE LA IMPORTANCIA DE LA NO-LINEALIDAD GEOMETRICA EN CIERTOS PROBLEMAS DE MECANICA DE FRACTURA

CARLOS NAVARRO\*  
y  
MIGUEL ANGEL ASTIZ\*\*

\* *E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos*

\*\* *E.T.S.I. Aeronáuticos*

*Universidad Politécnica de Madrid*

*Ciudad Universitaria s/n*

*28040 Madrid*

#### RESUMEN

*Esta comunicación presenta el estado de una investigación que se está llevando a cabo sobre la importancia que pueden tener los problemas no lineales en ciertos casos de Mecánica de Fractura. Se ha estudiado el caso de una probeta plana rectangular con una fisura lateral sometida a un estado de tracción simple. Los resultados obtenidos indican que la no consideración de los efectos de segundo orden en los ensayos del material puede traducirse en una sobreestimación de la tenacidad de fractura con la consiguiente pérdida de seguridad en la estructura real.*

#### 1. INTRODUCCION

El estudio del problema de Mecánica de Fractura en elementos estructurales esbeltos, como pueden ser los alambres de acero de pretensar, obliga a recurrir a ensayos no normalizados ya que, las pequeñas dimensiones transversales de estos elementos, hacen imposible el recurso a probetas normalizadas (Astiz<sup>1976</sup> y Valiente<sup>1980</sup>). Las probetas que se ensayan en estos casos mantienen la esbeltez del elemento del que se extraen y por lo tanto presentan una gran deformabilidad transversal.

Cuando el ensayo se realiza a tracción simple y la fisura es lateral, los esfuerzos de tracción inducen desplazamientos laterales que pueden modificar sustancialmente la distribución de tensiones en el elemento a causa de su cambio de geometría.

## 2. METODO DE ANALISIS

El elemento estructural elegido es el representado en la Figura 1 y consiste en una placa rectangular sometida a unas sollicitaciones que son preponderantemente de tracción. Esta placa rectangular presenta una fisura lateral cuya profundidad es igual a la mitad de la anchura de la placa. Se ha elegido este valor por coincidir con el propuesto en las normas del ensayo para las diferentes probetas consideradas (ASTM E399 y BS 5447).

La técnica de análisis tensional utilizada es la del método de los elementos finitos para lo cual se han utilizado elementos cuadrangulares de 8 nodos y elementos triangulares de 6 nodos.

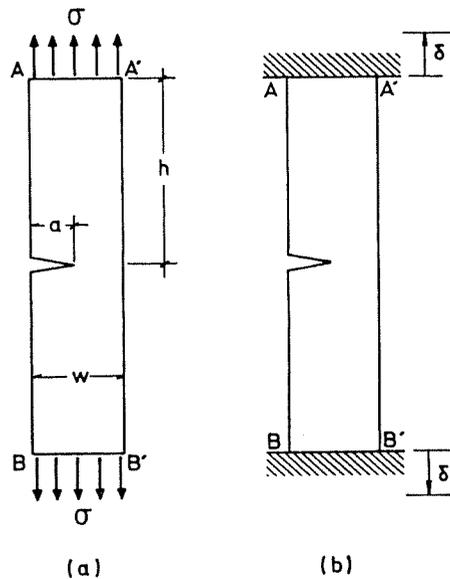


Figura 1.

El método se ha adaptado al problema de la Mecánica de Fractura mediante el recurso habitual a elementos singulares alrededor del borde de la fisura del tipo de los propuestos por Barsoum<sup>1976</sup> y Henshell y Shaw<sup>1975</sup>.

El problema se analiza en condiciones de deformación plana mediante el programa NONSAP de Bathe et al. (1974). La no-linealidad que se considera es la geométrica, motivada por una relación no-lineal entre el campo de deformaciones y el de desplazamientos. El tratamiento del problema se realiza empleando una formulación Lagrangiana en la que el estado de referencia es el inicial.

La malla de elementos utilizada está representada en la Figura 2 y corresponde a la mitad de la placa por razones de simetría. Se han estudiado casos con valores de la relación  $\frac{h}{w}$  comprendidos entre 3 y 200 para comprobar la influencia de la esbeltez de la pieza en su comportamiento no-lineal.

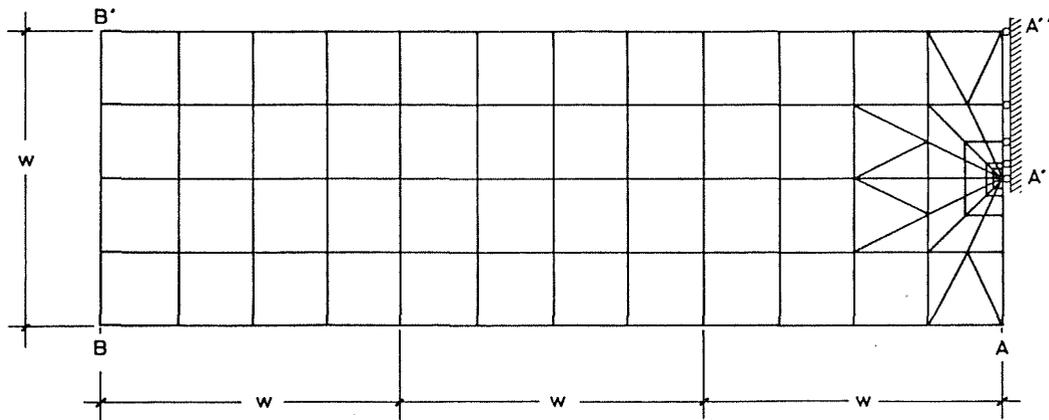


Figura 2

Las condiciones de contorno elegidas corresponden a estados de tracción simple (que denominaremos en lo sucesivo probeta bi-apoyada) y de tracción con giro impedido (que denominaremos bi-empotrada). Las condiciones de sollicitación que se producen en las máquinas de ensayos reales se pueden asimilar generalmente a una u otra de estas condiciones de contorno.

El cálculo de los factores de intensidad de tensiones se ha llevado a cabo por el método de aproximación del campo de desplazamientos a lo largo del labio de la fisura.

### 3. RESULTADOS

Al haber analizado un rango importante de valores de la relación  $\frac{h}{w}$  es posible evaluar la importancia que pueden llegar a tener los esfuerzos de flexión en probetas cuyo giro está impedido. Este es un problema importante en el caso del hormigón pretensado ya que en ciertas aplicaciones se han llegado a observar defectos o incluso grandes grietas en el hormigón que han llegado a dejar al aire los torones de acero de pretensar. En estas circunstancias es muy probable que se presenten fenómenos de fisuración por corrosión. En este caso, el hecho de que un alambre esté o no esté sometido a una sujeción lateral puede afectar de forma apreciable a su seguridad.

En efecto, considerando únicamente el caso elástico lineal convencional, el hecho de empotrar los extremos de la placa introduce unos esfuerzos de flexión que tienden a cerrar la fisura y por tanto aumentar la resistencia del elemento. Estos esfuerzos dependen en buena medida de la relación  $\frac{h}{w}$  como se puede apreciar en la Figura 3, mientras que para la probeta bi-apoyada el factor de intensidad de tensiones resulta prácticamente independiente de la relación  $\frac{h}{w}$ .

En el caso de los ensayos en laboratorio y cuando la máquina de ensayos imponga a la probeta condiciones de empotramiento, es importante que la esbeltez de la probeta sea mayor de 50 para poder asimilar los resultados a los de un ensayo en condiciones de tracción simple. En caso contrario se correría el riesgo de evaluar por exceso la tenacidad de fractura

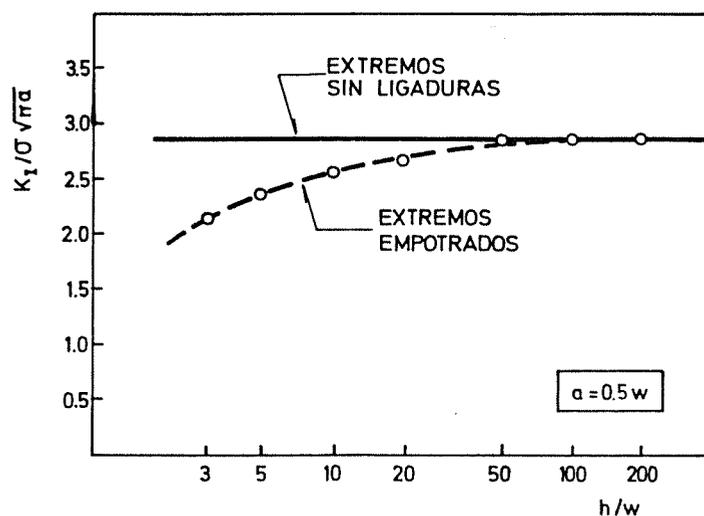


Figura 3

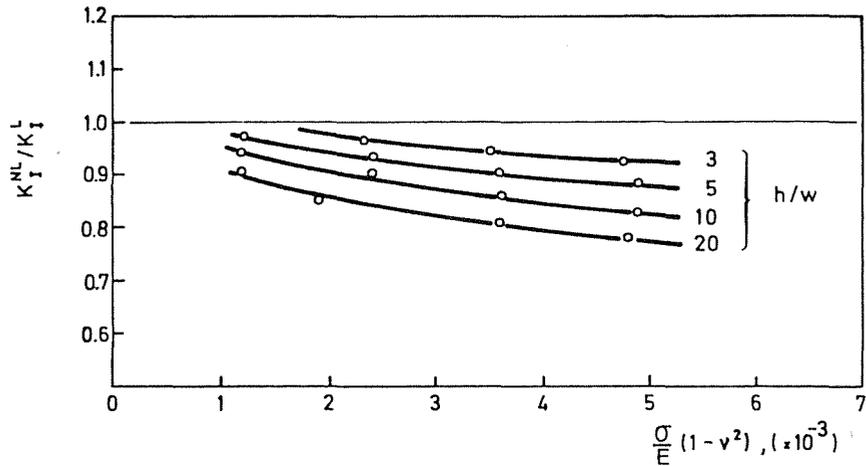
del material.

El estudio del problema no-lineal se ha realizado para un rango de la relación  $\frac{h}{w}$  más reducido que en el problema anterior. Dado que se conocen los factores de intensidad de tensiones, en las hipótesis de comportamiento lineal y no-lineal, se ha evaluado la importancia de ésta última representando el cociente entre ambos factores ( $K_I^{NL}/K_I^L$ ) en función de la tensión media de tracción, para los casos de probeta bi-empotrada (Fig. 4a) y bi-apoyada (Fig. 4b).

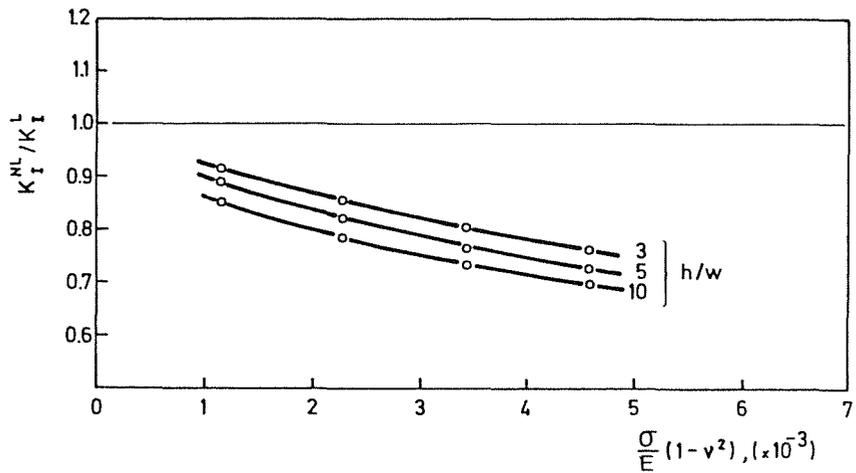
En todos los casos el efecto no-lineal reduce los valores del factor de intensidad de tensiones y en algún caso de forma apreciable (hasta en un 30% en los ejemplos presentados). Este hecho es tranquilizador en lo que respecta a la seguridad de la estructura real, pero no lo es tanto si lo que se considera es una probeta de ensayo ya que, en tal caso, el uso de las fórmulas de los manuales, o el cálculo del factor de intensidad de tensiones en la hipótesis de comportamiento lineal se traduciría en una sobreestimación de la tenacidad de fractura del material.

En el caso de la probeta bi-empotrada, que tiene una menor libertad de desplazamiento lateral, este efecto es de menor importancia que en la probeta bi-apoyada aunque a medida que se aumenta la relación  $\frac{h}{w}$  ambas probetas van dando resultados más parecidos como era de prever tras el análisis de los resultados representados en la Figura 3.

Por otra parte los valores de la tensión de tracción que aquí se han considerado oscilan alrededor del 10% de la carga crítica de Euler lo que en modo alguno justificaría la importancia de estos efectos no-lineales si no fuera por la presencia de la fisura lateral, factor determinante en este comportamiento.



(a)



(b)

Figura 4

#### 4. CONCLUSIONES

El trabajo que se presenta demuestra que la presencia de fisuras laterales puede provocar la aparición de efectos no-lineales que son beneficiosos para la seguridad de la estructura fisurada pero que deben ser considerados con sumo cuidado al analizar las probetas de ensayo para la determinación de la tenacidad de fractura de un material.

Estos resultados sugieren la necesidad de evaluar este efecto de modo rápido y sencillo sin tener que recurrir a modelos complicados y grandes tiempos de proceso como los que han sido necesarios en nuestro caso. Este es el objeto del trabajo que, como continuación del que aquí se presenta, están desarrollando los autores de esta comunicación.

REFERENCIAS

- . Astiz, M.A., "Estudio de la estabilidad de una fisura superficial en un alambre de acero de alta resistencia", *Tesis Doctoral*, Universidad Politécnica de Madrid, (1976).
- . Barsoum, R.S., "Fracture Mechanics", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. **10**, pp. 25-37, (1976).
- . Bathe, K.J., Ozdemir, H. y Wilson, E.L., "Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis", *Rep. No. UC SESM 74-4*, Structural Engineering Laboratory, Berkeley, California, pp. 178, (1974).
- . Henshell, R.D. y Shaw, K.G., "Crack Tip Finite Elements are Unnecessary", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. **9**, pp. 495-507, (1975).
- . Valiente, A., "Criterios de Fractura para alambres", *Tesis Doctoral*, Universidad Politécnica de Madrid, (1980).

# UN NUEVO ELEMENTO FINITO DE TRANSICION EN PROBLEMAS DE FRACTURA EN MODO MIXTO

L. GAVETE  
F. MICHAVILA  
y  
F. HERAS

*Departamento de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos  
E.T.S. Ingenieros de Minas  
Universidad Politécnica de Madrid  
C/ Rios Rosas. 28003 MADRID*

## 1. INTRODUCCION

Existen varios elementos finitos especiales para problemas de fractura plana<sup>1</sup> que intentan reproducir el comportamiento singular de la solución (tensiones o deformaciones) en el vértice de la fisura. Todos ellos han sido abundantemente analizados y comprobados en la bibliografía (ver por ejemplo<sup>1,2</sup>), pero en general se observaba una laguna en el análisis teórico de la solución aproximada dentro del elemento. Este estudio ha sido abordado recientemente<sup>3,4</sup> y muestra claramente las razones por las cuales algunos elementos finitos producían resultados anómalos en algunos casos. Por otro lado se observa claramente que la mayoría de los tests numéricos efectuados han sido llevados a cabo considerando condiciones de carga simples (concretamente en modo I). Sin embargo es sabido que la prueba más severa para elementos singulares es en modo mixto, donde están presentes el Modo I y el Modo II. En el presente trabajo se efectúa una evaluación numérica de un nuevo elemento finito de transición recientemente introducido<sup>5</sup>, bajo condiciones de carga combinadas, lo cual completa la evaluación realizada en la referencia 6 sobre la utilización de un nuevo elemento finito singular en un problema de fractura en modo mixto.

**2. ELEMENTOS TRANSFORMADOS QUE ADOPTAN LA FORMA DE LA SINGULARIDAD EN UN DOMINIO CON CONTORNO IRREGULAR**

Si consideramos siguiendo Aalto<sup>7</sup> un elemento cuadrático incompleto de tipo cuadrilateral con una aproximación lineal sobre el elemento, tendremos (Figura 1):

$$\begin{aligned} U &= \frac{U_I + U_{II}}{2} + \frac{U_{II} - U_I}{2}(\mu_i - 1) \\ V &= \frac{V_I + V_{II}}{2} + \frac{V_{II} - V_I}{2}(\lambda_i - 1) \end{aligned} \tag{1}$$

en donde  $\mu_i, \lambda_i \in [0, 2]$ ,  $U_I$  y  $U_{II}$  son isovalores de la función  $U$ ;  $V_I$  y  $V_{II}$  son isovalores de las líneas de corriente sobre el elemento.

$U_I, U_{II}, V_I$  y  $V_{II}$  coinciden con los lados del elemento.

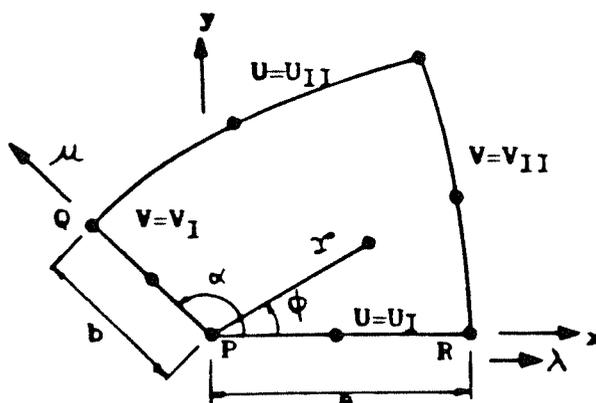


Figura 1.

En un medio infinito en coordenadas polares la solución de  $\Delta U = 0$  viene dada para el caso de dominios no convexos, en la vecindad del vértice entrante por:

$$U(r, \phi) = K_1 r^{\pi/2\alpha} \sin \frac{\pi\phi}{2\alpha} + K_3$$

y por tanto:

$$V(r, \phi) = K_1 C r^{\pi/2\alpha} \cos \frac{\pi\phi}{2\alpha} + K_2 \tag{2}$$

donde  $K_1, K_2$  y  $K_3$  son constantes y  $C$  una propiedad del material. Particularizando, tendremos:

$$\text{Linea } PQ \rightarrow V(r, \alpha) = K_2 = V_I; \quad \text{Pto. } R \rightarrow V(a, 0) = K_1 C a^{\pi/2\alpha} + K_2 = V_{II}$$

$$\text{Linea } PR \rightarrow U(r, 0) = K_3 = U_I; \quad \text{Pto. } Q \rightarrow U(b, \alpha) = K_1 b^{\pi/2\alpha} + K_3 = U_{II}$$

de donde obtenemos  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  y sustituyendo en  $U(r, \phi)$  y  $V(r, \phi)$  podemos despejar para  $r$  y  $\phi$ :

$$\begin{aligned} r &= \left[ a^{\pi/\alpha} \left( \frac{V - V_I}{V_{II} - V_I} \right)^2 + b^{\pi/\alpha} \left( \frac{U - U_I}{U_{II} - U_I} \right)^2 \right]^{\alpha/\pi} \\ \phi &= \frac{2\alpha}{\pi} \text{arc tg} \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^{\pi/2\alpha} \frac{U - U_I}{U_{II} - U_I} \frac{V_{II} - V_I}{V - V_I} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

sustituyendo los valores de la aproximación lineal de  $U, V$  y operando:

$$\begin{aligned} r_i &= \left[ \frac{a^{\pi/\alpha}}{4} \lambda_i^2 + \frac{b^{\pi/\alpha}}{4} \mu_i^2 \right]^{\alpha/\pi} \\ \phi_i &= \frac{2\alpha}{\pi} \text{arc tg} \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^{\pi/2\alpha} \frac{\mu_i}{\lambda_i} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

En el caso que nos ocupa, se trata de resolver un problema elástico y de aproximar, por tanto, los desplazamientos. Basta para ello considerar el caso  $\alpha = \pi$  (y  $a = b$  sin pérdida de generalidad) y ubicar los nodos de acuerdo con la regla:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{a}{4} (\lambda_i^2 - \mu_i^2) \\ y_i &= \frac{a}{2} \lambda_i \mu_i \end{aligned} \quad (5)$$

Esto da lugar al elemento de la Figura 2, siendo 1 el punto singular.

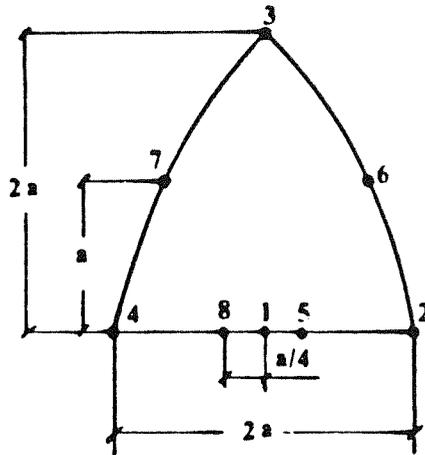


Figura 2. Caso  $\alpha = \pi$

### 3. NUEVOS ELEMENTOS SINGULARES TRANSFORMADOS DE TRANSICION EN EL CASO DE GRIETAS

La transformación (5) anterior es válida no sólo en el elemento finito singular. Se puede utilizar para los elementos cercanos al elemento singular, que denominamos elementos de transición. Esto es válido para cualquier elemento de orden  $\geq 2$  sea completo ó incompleto. En el caso  $\alpha = \pi$  con  $a = b$ , obtendremos la Figura 3 para el caso de los elementos cuadráticos incompletos o de Serendipity.

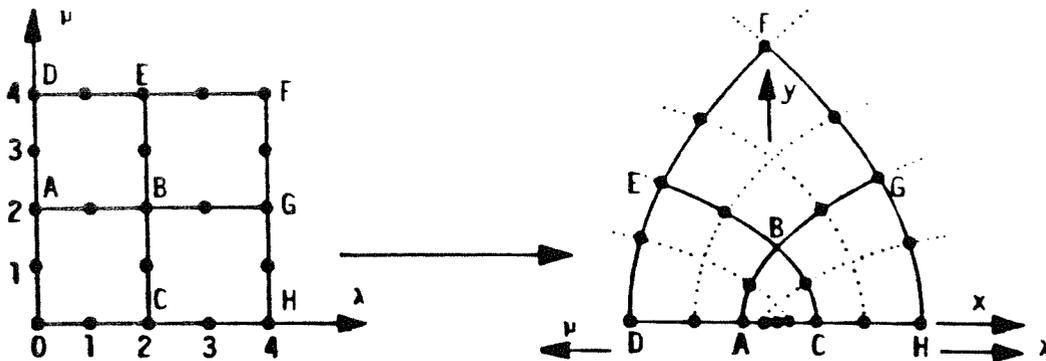


Figura 3. Elemento singular y elementos de transición

Como vemos mediante la transformación (5) obtenemos un elemento singular y tres elementos de transición que rodean el elemento singular, en este caso hemos considerado que  $\lambda, \mu \in [0, 4]$ .

Es interesante señalar que la posición de los nodos intermedios de los elementos de transición a lo largo de  $\lambda = 0$  y  $\mu = 0$ , coincide con la que se obtendría aplicando la fórmula dada por Lynn e Ingraffea<sup>6</sup>.

Por tanto, puede decirse que la transformación (5) es una transformación totalmente general que engloba la fórmula de la referencia 8.

Todo lo señalado anteriormente se puede extender a los elementos cúbicos, cuárticos, etc., de Serendipity y de Lagrange. En el caso de los elementos cúbicos, la distancia de los nodos de los elementos de transición (a lo largo de  $\lambda = 0$  y  $\mu = 0$ ) al punto singular coincide con la señalada por Pu, Hussain y Lorensen en la referencia 9.

Es claro que el tamaño del elemento singular puede afectar la exactitud de la solución, dado que no conocemos a priori la zona de influencia de la singularidad. El elemento singular representa una variación radial de los gradientes, que es la suma de un término  $r^{-\frac{1}{2}}$  y un término constante (el resto de los términos es despreciable).

Si consideramos un modelo particular y aumentamos el tamaño del elemento singular, entonces en la zona del dominio que abarca dicho elemento el término de gradiente constante con variación no lineal en el espacio, tiene que ser aproximado por el término de gradiente constante del elemento finito. Esto es obviamente una fuente de error. De acuerdo con Harrop<sup>10</sup>, si el tamaño del elemento singular se reduce, el error que se produce al aproximar el gradiente disminuye. Los elementos que rodean el elemento singular tienen que representar

parte del término  $r^{-\frac{1}{2}}$  del gradiente; pero si ellos son estandar, no pueden representarlo adecuadamente, de modo que estamos introduciendo una nueva fuente de error al disminuir el tamaño del elemento.

Por ello es conveniente tener en cuenta la forma de la singularidad en la zona que rodea al elemento singular.

De ahí la utilidad de los elementos de transición que luego comprobaremos numéricamente.

#### 4. SOBRE EL CALCULO NUMERICO DE LOS FACTORES DE INTENSIFICACION DE TENSIONES

Consideremos un sólido fisurado sometido a la acción de una serie de fuerzas exteriores. La resolución de las ecuaciones de equilibrio cuasi-estático en un entorno del vértice de la grieta y bajo las hipótesis de que aquél se encuentra en un medio linealmente elástico, isótropo y homogéneo, conduce a las siguientes componentes asintóticas del campo de desplazamiento y tensiones:

$$u_i = K_I \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i(\theta) + K_{II} \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta) \quad i = 1, 2 \quad (6a)$$

$$\sigma_{ij} = K_I \frac{1}{\sqrt{(2\pi r)}} f_{ij}(\theta) + K_{II} \frac{1}{\sqrt{(2\pi r)}} g_{ij}(\theta) \quad i = 1, 2 \quad (6b)$$

En las expresiones anteriores, los subíndices hacen referencia al sistema de ejes de la Figura 4,  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas polares centradas en  $S$  (vértices de grieta).

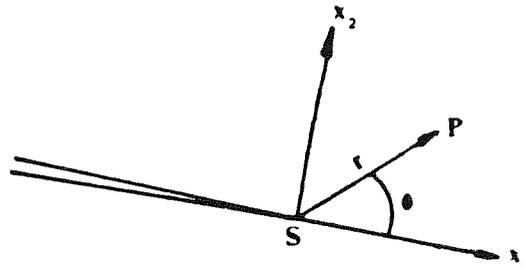


Figura 4. Ejes locales en el vértice de la grieta

Las funciones angulares  $f_i, g_i, f_{ij}$  y  $g_{ij}$  sólo dependen del ángulo  $\theta$  y de la aproximación plana exigida,  $\mu$  es el módulo de cizallamiento y  $K_I$  y  $K_{II}$  los factores de intensificación de tensiones en modo  $I$  y  $II$ .

La expresión (6b) indica que las tensiones se hacen infinitas en el vértice de la grieta. Físicamente existe sin embargo una relajación de las tensiones debido a deformaciones inelásticas y plastificación en un entorno de  $S$ . Si la zona donde se producen estos fenómenos es pequeña comparada con la singular (donde tienen aplicación las (6)) podemos

tratar el problema como elástico, lineal, (mecánica de la fractura lineal y elástica, MFLE). Restrindiéndonos por tanto a la MFLE podemos decir que todos los criterios de fractura se reducen a una relación del tipo:

$$f(K_I, K_{II}, \text{constantes del material}) = 0 \quad (7)$$

Es por tanto fundamental según indica (7) el cálculo de los factores  $K_I$  y  $K_{II}$ . Para ello se puede comenzar analizando las expresiones (6). Si la solución del problema elástico es conocida (mediante un análisis por el método de los elementos finitos, por ejemplo)  $K_I$  y  $K_{II}$  pueden ser evaluados en cualquier punto próximo a  $S$  donde son válidas las expresiones asintóticas (6). Haciendo dicho cálculo para  $\theta = \pi$  y  $\theta = -\pi$  se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{(2\pi r)} \sigma_{22}(\mathbf{x}_1 = r, 0) = \\ &= \frac{2\mu}{k+1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left( u_2(\mathbf{x}_1 = r_1, +0) - u_2(\mathbf{x}_1 = r, -0) \right) \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{(2\pi r)} \sigma_{12}(\mathbf{x}_1 = r, 0) = \\ &= \frac{2\mu}{k+1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left( u_1(\mathbf{x}_1 = r_1, +0) - u_1(\mathbf{x}_1 = r_1, -0) \right) \end{aligned} \quad (8b)$$

Las expresiones (8) indican que los factores de intensificación pueden interpretarse como factores de discontinuidad de los desplazamientos<sup>11,12</sup>, y en este sentido, si mediante un cálculo por el método de elementos finitos conocemos el campo de desplazamientos en puntos “suficientemente” próximos a  $S(r \rightarrow 0)$  se llega a las expresiones (Figura 5)

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_2^A - u_2^B) \\ K_{II} &= \frac{\mu}{k+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_1^A - u_1^B) \end{aligned} \quad (9a, b)$$

donde  $u_2^A, u_2^B, u_1^A, u_1^B$  son los desplazamientos verticales y horizontales de los nodos  $A$  y  $B$  (inicialmente superpuestos).

Las expresiones (9) constituyen la llamada técnica de correlación de los desplazamientos y dan buenos resultados siempre que  $A$  y  $B$  se encuentren suficientemente cerca del vértice de grieta<sup>9</sup>.

Una mejora sobre esta técnica y su generalización a problemas con sollicitación mixta en modos  $I$  y  $II$  ha sido desarrollada por Ingraffea y Mau<sup>13</sup>.

En esencia, de acuerdo con Llorca, Elices e Ingraffea<sup>14</sup> el método consiste en igualar los valores calculados analíticamente con los calculados sobre el elemento singular correspondiente. Los valores que se igualan son los desplazamientos en los labios de la fisura.

En el caso de la Figura 5 se llega a las siguientes expresiones:

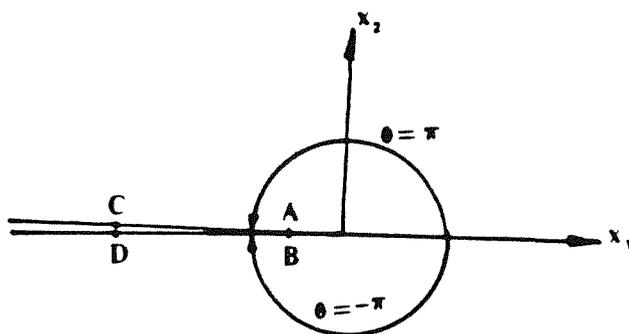


Figura 5. Cálculo de los F.I.T.

$$K_I = \sqrt{2\pi/L} \frac{\mu}{k+1} \left[ 4(u_2^A - u_2^B) + u_2^D - u_2^C \right] \quad (10a)$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi/L} \frac{\mu}{k+1} \left[ 4(u_1^A - u_1^B) + u_1^D - u_1^C \right] \quad (10b)$$

siendo  $L$  la longitud del lado del elemento singular sobre el labio de la fisura.

## 5. UN TEST NUMERICO

En la Figura 6 aparece el problema tratado.

Se trata de una pieza en deformación plana sometida a una tracción uniforme en los extremos y con una grieta inclinada en el borde.

Por otro lado se ha usado un orden de integración  $2 \times 2$  para los cuadriláteros, como es recomendable para el tipo de elementos cuadráticos incompletos con nodos a "1/4". (Ver referencias 2 y 15).

Se han desarrollado sendos modelos, que aparecen en la Figura 7 y la Figura 8.

En el primero se han utilizado los elementos descritos en el presente trabajo, mientras que en el segundo, los seis elementos que rodean el vértice de la singularidad, son triángulos "1/4".

Por otro lado, se han empleado dos condiciones de contorno distintas (Figura 9) que como se observa en los resultados, son equivalentes.

Se puede comprobar, (Tabla I calculada en función de las fórmulas 9a y 9b) que los resultados son superiores en cálculo en modo  $I$  que en modo  $II$ . Como es bien sabido el modo de fractura predominante es el  $I$ . De hecho, la fisura siempre tiende a propagarse en modo  $I$ <sup>16</sup>, y precisamente el hecho de que estén presentes ambos modos de carga al comienzo de la propagación hace que la fisura se desvíe (buscando el modo  $I$ ). Precisamente por este motivo, las expresiones para los desplazamientos verticales ( $u_2$  y por tanto  $K_I$ ) dan mucho mejores resultados que las de los horizontales ( $u_1$  y por tanto  $K_{II}$ ), dado que son de mayor magnitud y mucho más próximos a las expresiones asintóticas (6). De hecho un aumento del ángulo  $\beta$  hasta alcanzar el modo  $I$  puro ( $\beta = \pi/2$ ) daría lugar a mucho mejores aproximaciones, como ha sido publicado en la referencia 17.

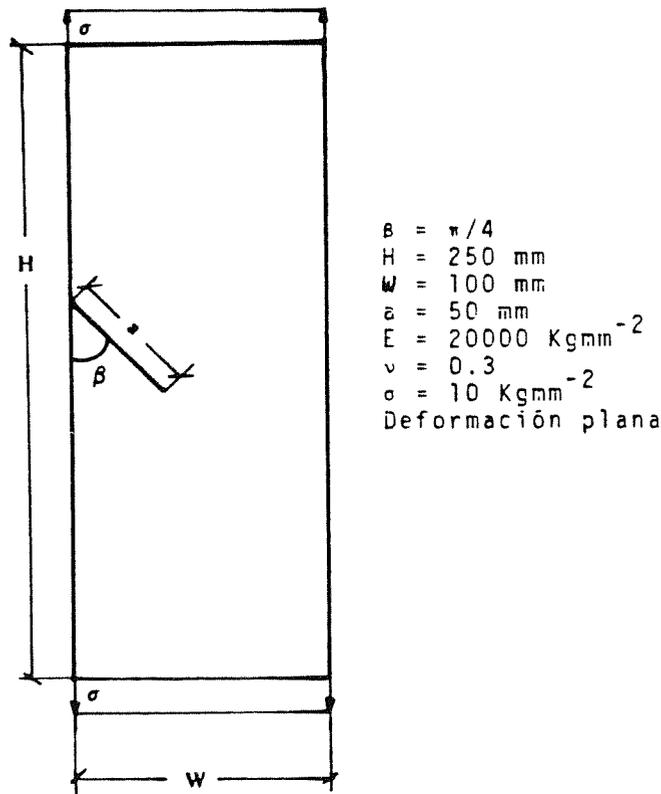


Figura 6. Problema Estudiado

En la Figura 10 puede verse el nuevo modelo desarrollado utilizando elementos singulares y de transición transformados en base a la forma conocida de la singularidad, en el dominio ABCDEFG de la Figura 7. El resto del dominio que no se ha dibujado, es idéntico al de la Figura 7. Los puntos 0 y 0' están en la misma posición que sus homólogos de la Figura 7.

En la Tabla II pueden verse los resultados obtenidos en los modelos 1 (elementos singulares y de transición transformados en base a la forma conocida de la singularidad) y 2 (elementos singulares con nodos a "1/4" y elementos de transición<sup>8</sup>). Se ha utilizado una única condición de contorno 1.  $F_I$  y  $F_{II}$  se han calculado por las fórmulas 9(a, b) anteriores. El modelo 2 es idéntico al de la Figura 8, salvo que los nodos de los elementos de transición están desplazados según la fórmula de Lynn e Ingrassia<sup>8</sup>.

En la siguiente tabla III pueden verse los resultados obtenidos empleando las fórmulas (10) de Ingrassia y Manu<sup>13</sup> en los modelos de las Figuras 7, 8 y 10 en el caso de la condición de contorno 1.

Unos resultados prácticamente idénticos se obtienen para la condición de contorno 2.

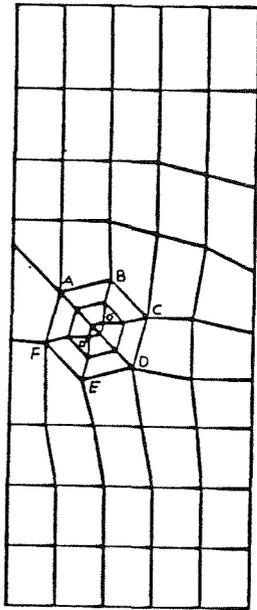


Figura 7. Modelo 4

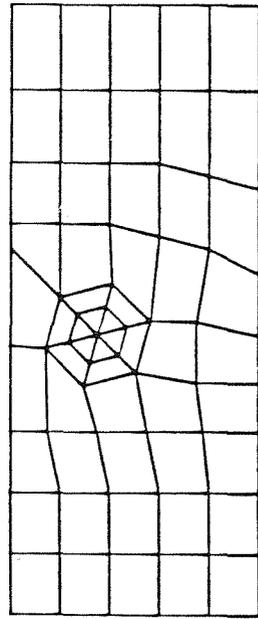
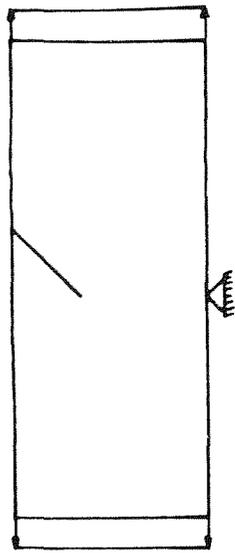
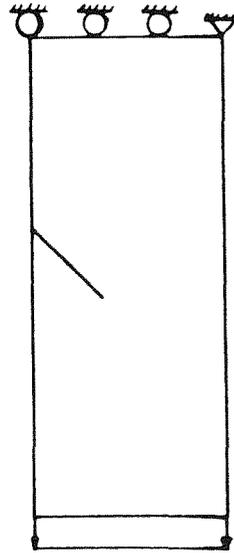


Figura 8. Modelo 3



C.C. 1



C.C. 2

Figura 9. Condiciones de contorno

## 6. CONCLUSIONES

Comparando los resultados de las tablas *I*, *II*, y *III*, se deduce que los elementos de transición transformados en base a la forma analítica conocida de la singularidad, aseguran

	$F_I = K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$		$F_{II} = K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$		Error (%)		
	C.C.1	C.C.2	C.C.1	C.C.2	C.C.1	C.C.2	
Valor ref. [18]	1.20	1.20	0.57	0.57	-----	-----	
Modelo 3 (1/4)	1.15	1.15	0.56	0.56	$F_I$	4.14	4.12
					$F_{II}$	1.00	1.04
Modelo 4 (§2)(fig.7)	1.18	1.18	0.59	0.59	$F_I$	1.75	1.60
					$F_{II}$	3.46	3.82

TABLA I. Resultados para los modelos de las Figuras 7 y 8

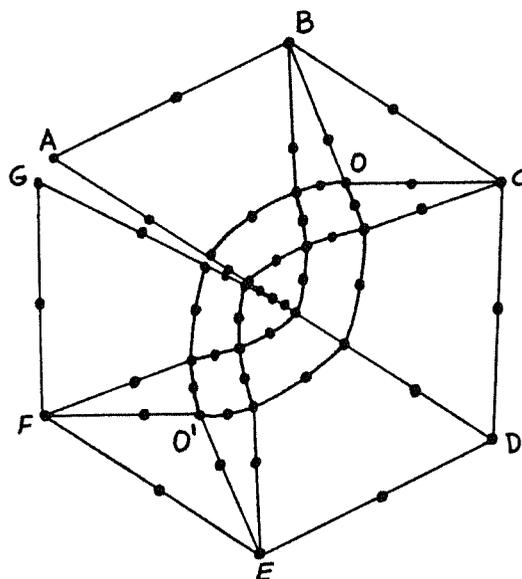


Figura 10. Detalle del modelo

una mejor aproximación en cuanto al error total (suma de los errores en  $K_I$  y  $K_{II}$ ). Además tienden a repartir de modo uniforme ese error total entre  $K_I$  y  $K_{II}$ , es decir, mejora la aproximación de  $K_{II}$  pero disminuye la aproximación de  $K_I$ .

Sin embargo, la mejora del error total obtenido es pequeña y tienden más a repartir uniformemente el error que a disminuir el error total. Un efecto parecido (aunque de menor cuantía) se obtiene empleando los elementos a "1/4" junto con los elementos de transición de la referencia 8.

En los casos estudiados siempre se ha obtenido que el error total es menor para los nuevos

	$F_I = K_I / \sigma \sqrt{a\pi}$	$F_{II} = K_{II} / \sigma \sqrt{a\pi}$	E R R O R	
			$F_I$	$F_{II}$
Modelo 1 ( $\frac{1}{2}$ )+transición	1.16	0.58	3.33%	1.75%
Modelo 2 ( $1/4$ +transición)	1.19	0.54	0.83%	5.26%

TABLA II.

Cond.Contorno 1	$F_I = K_I / \sigma \sqrt{a\pi}$	$F_{II} = K_{II} / \sigma \sqrt{a\pi}$	ERROR (%)		Σ ERRORES
			$F_I$	$F_{II}$	
Modelo 3 ( $1/4$ )	1.08127	0.55466	9.89	2.69	12.58
Modelo 4 Singular § 2	1.20314	0.63540	0.26	11.47	11.73
Modelo 1 Singular y transición	1.1674	0.62105	2.71	8.95	11.66
Modelo 2 ( $1/4$ +transición)	1.08156	0.55483	9.87	2.66	12.53

TABLA III.

elementos singulares y de transición frente a los elementos a “1/4” más los de transición correspondientes.

Por todo ello, parece más recomendable en problemas de fractura en modo mixto el elemento singular transformado para el cálculo del  $K_I$  y emplear elementos singulares y de transición transformados para el cálculo del  $K_{II}$ . Es decir, aparece una ventaja evidente en el empleo de elementos de transición transformados cuando se quiere conocer el  $K_{II}$  en problemas de fractura en modo mixto en  $\Omega \in R^2$ .

AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen a la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología la ayuda recibida dentro del proyecto PA 850053.

REFERENCIAS

1. S.N. Atluri, "Computational methods for plane problems of fracture", S. N. Atluri, ed., *Computational Methods in the mechanics of fracture*, Elsevier Science Publishers, (1986).
2. V.E. Saouma y D. Schewmmer, "Numerical evaluation of the quarter-point crack-tip element", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **20**, pp. 1629-1641, (1984).
3. G. M. Thompson y J. R. Whiteman, "Analysis of strain representation in linear elasticity by both singular and nonsingular finite elements", *Num. Methods for Par. Diff. Eq.*, Vol. **2**, pp. 85-104, (1985).
4. F. Michavila, L. Gavete, F. Diez, "Two different approaches for the treatment of boundary singularities". A aparecer en *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, (1988).
5. L. Gavete, "Elementos finitos y de transición isoparamétricos curvos para el estudio de singularidades en ecuaciones en derivadas parciales elípticas", Actas IX CEDYA, pp. 191-197, Valladolid, (1987).
6. F. Diez, L. Gavete y F. Michavila, "Evaluación numérica de un nuevo elemento finito singular en problemas de fractura en modo mixto", *I Jornadas Ibéricas de Fractura* (A aparecer), Braga, Portugal, (1987).
7. J. Aalto, "Singularity elements for seepage problems", *Int. J. Num. Anal. Methods in Geom.*, Vol. **9**, pp. 185-189, (1985).
8. Lynn e Ingraffea, "Transition elements to be used with quarter-point crack-tip elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **12**, pp. 1031-1036, (1978).
9. S.L. Pu, A. Hussain y W.E. Lorensen, "The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems", *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. **12**, pp. 1727-1742, (1978).
10. Harrop, "The optimum size of quarter-point crack-tip elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, pp. 1101-1103, (1982).
11. F. Erdogan, "Stress intensity factors", *J. of App. Mech.*, Transactions of the ASME, Vol. **50**, pp. 992-1002, (1983).
12. H.D. Bui, "*Mecanique de la rupture fragile*", Masson, París, (1978).
13. A.R. Ingraffea y C. Manu, "Stress intensity factor computations in three dimensions with quarter-point crack-tip elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **12**, pp. 235-248, (1978).
14. J. Llorca, M. Elices y A. R. Ingraffea, "Análisis lineal y no lineal de propagación de fisuras en hormigón", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculos y Diseño en Ingeniería*, Vol. **3**, no. 3, pp. 309-333, (1987).
15. F. Michavila y L. Gavete, "On the use of quadratic transition element", *Proceedings of the Third Int. Conference Num. Meth. Fract. Mech.*, pp. 95-111, Pineridge Press. Swansea, U. K., (1984).
16. M. Amestoy, H.D. Bui, "Propagation déviée d'une fissure", Problèmes non linéaires

- appliqués: Mécanique de la rupture INRIA, Paris, (1982).
17. N.A.B. Yehia y M.S. Shepard, "On the effect of quarter-point element size on fracture criteria", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **21**, pp. 1911–1924, (1985).
  18. J.L. Cheissoux y J.F. Juárez, "*Fiches de validation du code MAYA en mécanique de la rupture*", IPSI, Paris, (1986).

# ESTUDIO ELASTOPLASTICO TRIDIMENSIONAL DE FISURAS POR FATIGA

ALEJANDRO FONT  
y  
GERARDO ESPINOSA

*Pontificia Universidad Católica de Chile  
Departamento de Ingeniería Mecánica y Metalurgia  
Casilla 6177. Santiago-Chile*

## RESUMEN

Se presenta un estudio, mediante elementos finitos elastoplásticos tridimensionales de fisuras que se propagan por fatiga. Por una parte se estudia la distribución de tensiones y de deformaciones mediante elementos finitos en probetas compactas de varios espesores (2 a 50 mm), y por otra se utilizan esos resultados para estimar la velocidad de propagación con un modelo de acumulación de daño por deformaciones plásticas cíclicas frente a la fisura. Este modelo se desarrolló anteriormente a partir del modelo de Liu e Iino y se validó a partir de un estudio metalográfico detallado de la punta de la fisura mediante microscopía de transmisión y barrido, microdureza y ataques metalográficos adecuados, Font. Anteriormente se utilizó este modelo junto con elementos finitos elastoplástico bidimensionales en deformaciones planas y en tensiones planas obteniéndose una buena correlación con resultados experimentales.

Con el propósito de realizar un estudio más detallado surgió este trabajo con elementos finitos tridimensionales elastoplásticos. Se consideró que el material sigue la curva cíclica estabilizada ya que los elementos de volumen frente a una fisura que se propaga por fatiga son sometidos a un gran número de ciclos a cada amplitud de deformación plástica, lo que les permite alcanzar la estabilidad cíclica. El tamaño de los elementos finitos inmediatos a la punta de la fisura fue de  $4 \mu\text{m}$  para poder describir bien la deformación local según observaciones experimentales.

Para las probetas indicadas se cubrió un rango de sollicitaciones equivalentes entre 0 y  $34\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Basándose en el modelo indicado y en el concepto de  $\Delta K_{eff}$  de Elbér (cierres de fisura), se obtuvo como resultado que es posible describir en buena forma un umbral de no propagación para un acero AISI 316, lo que se concluyó comparando con valores experimentales; sin embargo, estimamos que esta metodología es válida para otros

materiales como latón  $\alpha$ , por ejemplo. En particular, se muestra que este umbral es el mismo para todas las probetas (2 a 50 mm de espesor). Se concluyó que para estudios posteriores bastaría un programa en deformaciones planas y que para trabajos experimentales bastaría probetas delgadas, lo que incide enormemente en el costo de fabricación y ensayo.

Por otra parte, las deformaciones frente a la fisura no revelan diferencias esenciales según los espesores estudiados y hasta el nivel de carga observado (equivalente a  $\Delta K = 34 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ). Esto implica que en fatiga, hasta este nivel de sollicitaciones, la probeta de 2 mm se comporta prácticamente como si estuviera en deformaciones planas. Las velocidades de fisuración calculadas están de acuerdo con las observaciones anteriores y los resultados experimentales de Rickerby y Fenici confirman esto, ya que las velocidades en probetas de 0,9 mm muestran excelente correlación con nuestras predicciones. Esto confirmaría que pueden emplearse probetas de espesores pequeños para determinar el comportamiento a la fisuración por fatiga, al menos bajo ciclado regular, lo que incidiría, como hemos dicho, en una disminución en los costos de fabricación y ensayo de las probetas.

#### SUMMARY

A study of fatigue crack growth using tridimensional elasto-plastic finite elements is presented. The distribution of stresses and strains is studied using finite elements in compact test specimens of different thickness (2 to 50 mm); results are analyzed so as to estimate the crack growth rate on the basis of a model of damage cumulation by plastic deformations ahead of the crack tip. This model has been developed previously starting from Liu and Iino's model and validated by means of transmission and scanning electron microscopy, microhardness, and adequate metalographic etching near the crack tip, Font. This model was used previously together with bidimensional elasto-plastic finite elements in plane strain and plane stress, thus obtaining a proper correlation with experimental results.

This study is an attempt to make a more detailed analysis using tridimensional elasto-plastic finite elements. It was considered that the material behaviour is described by the steady cyclical curve, because volume elements near the crack tip are submitted to a high number of cycles at each plastic strain amplitude level, thus reaching cyclic stability. The size of the finite elements located near to the crack tip was  $4\mu\text{m}$  so as to properly describe the local deformation, in agreement with experimental observations.

For the test specimens mentioned above, a range of sollicitations was covered equal to 0 to  $34 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ . On the basis of the above model and Elber's  $\Delta K_{eff}$  concept (crack closure), it was found that it was possible to make a proper description of a zero crack spread threshold for an AISI 316, after a comparison of experimental values; yet we believe that such a methodology is also valid for other materials, like  $\alpha$  brass. In particular, this threshold is shown to be the same for all test specimens (2 to 50 mm thickness). It was concluded that later studies would require just a plane strain model while experimental work would require thin test specimens only, making a considerable difference in the cost of manufacture and of essays.

On the other hand, deformations ahead of fatigue crack do not show any essential differences related to the thickness range studied up to the loading level observed (equal to  $\Delta K = 34 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ). This means that, as regards fatigue, up to this level of sollicitations, the 2 mm test specimen will behave virtually as if it were in plane strain. Estimated crack

*growth rate agree with previous observations, and Rickerby and Fenici's experimental results support this, since 0,9 mm test specimen show excellent correlation with our predictions. This seems to confirm the fact that it is possible to use thin specimens to study fatigue-induced cracks, at least when cycle amplitude remains constant. As previously stated, this would make possible a considerable reduction in the cost of manufacture, of essays and of test specimens.*

## 1. INTRODUCCION

Se han realizado muchos estudios numéricos con una modelación elastoplástica bidimensional para analizar la plastificación alrededor de la punta de fisuras de fatiga y también para estimar la velocidad de fisuración, dentro de los que cabe mencionar los trabajos de Newman<sup>1-4</sup>, Anquez<sup>5,6</sup> y Cortés<sup>7</sup>. Es así como Newman<sup>1-4</sup> en diversas investigaciones utiliza mallas con elementos de 80 a 640  $\mu\text{m}$  de longitud en las inmediaciones de la punta de la fisura, tamaños que consideramos que no son lo suficientemente pequeños para describir en forma adecuada la deformación local, como veremos más adelante. Por otra parte, Cortés<sup>7</sup> en un acero inoxidable AISI 316 estudió la plastificación local que se produce en modo I de apertura y mediante un modelo de acumulación de daño plástico, determinó la velocidad de propagación de la fisura en la etapa de propagación estable en un estado de deformaciones planas y también en tensiones planas. Las velocidades estimadas para probetas en estos dos estados son claramente diferentes, siendo los valores calculados en tensiones planas aproximadamente 25 veces los correspondientes en deformaciones planas. Por otro lado, los valores experimentales de velocidad de propagación para este material en la etapa de propagación estable entre probetas gruesas y delgadas muestran diferencias mucho menores a las indicadas en ese estudio.

Habitualmente para describir en forma gráfica la velocidad de fisuración ( $da/dN$ ) (en que  $a$  es la longitud de la fisura y  $N$  el número de ciclos de fatiga) se la representa versus la variación que experimenta en cada ciclo el factor de intensidad de tensiones,  $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ , en escalas log-log. Como muestra la Figura 1, usualmente se pueden identificar tres regiones para ( $da/dN$ ): I) región de pequeñas velocidades de propagación (umbral), en donde ( $da/dN$ ) decrece rápidamente con la disminución de  $\Delta K$  hacia un valor de umbral,  $\Delta K_{th}$ ; II) región intermedia o de propagación estable, donde la relación de Paris se verifica:  $da/dN = C(\Delta K)^m$ , con  $C$  y  $m$  constantes; III) región de altas velocidades de propagación, donde ( $da/dN$ ) crece rápidamente cuando  $K_{max}$  se aproxima al valor crítico del factor de intensidad de tensiones para falla estática,  $K_c$ .

En este trabajo, y para comprender mejor el funcionamiento de piezas fisuradas, se realiza un análisis elastoplástico mediante elementos finitos tridimensionales similar al seguido por Cortés<sup>7</sup> en forma bidimensional para estimar la velocidad de fisuración con un modelo de acumulación de daño plástico. Por una parte, se pretende determinar un umbral de propagación para este material (región I de la Figura 1) y, por otra, la descripción de la etapa de propagación estable (región II). Se emplea el mismo acero inoxidable AISI 316 de la referencia<sup>7</sup>. Se consideran probetas de tensión compactas (CT) solicitadas en modo I de apertura, de varios espesores (2, 4, 8, 16 y 50 mm) para analizar en particular la

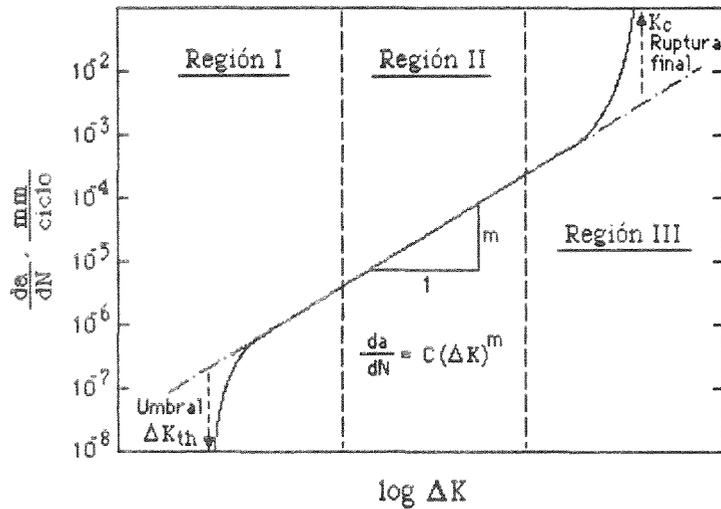


Figura 1. Representación esquemática de la velocidad de propagación de una fisura ( $da/dN$ ) como función de la variación del factor de intensidad de tensiones  $\Delta K$ , en escalas log-log. Región I: pequeñas velocidades de propagación (umbral), región II: propagación estable (relación de Paris), región III: altas velocidades de propagación ( $K_c$ ).

influencia de este parámetro sobre la velocidad de fisuración y con ello poder develar las discrepancias que se advierten entre los resultados numéricos obtenidos mediante análisis plano y los resultados experimentales, y también para estudiar por qué no se evidencian en los resultados experimentales las diferencias señaladas en el análisis plano.

## 2. METODOLOGIA DE TRABAJO

En el presente estudio se analizaron probetas de tensión compacta de acero inoxidable AISI 316 de 2, 4, 8, 16 y 50 mm de espesor, todas las otras dimensiones se mantuvieron constantes. Sus geometrías se muestran en la Fig. 2. Debido a las condiciones de simetría de la probeta y también de la aplicación de las cargas externas, se modeló sólo un cuarto de la probeta. Para la representación de las probetas se emplearon mallas compuestas por elementos hexaédricos trilineales de 8 nodos. Los elementos se ubicaron a través de la mitad del espesor en 5 capas similares, cada una de 66 elementos, que originaron un total de 330 elementos y 522 puntos nodales. Para la evaluación de las deformaciones y de las tensiones se tomaron 8 puntos de integración de Gauss (2 en cada dirección) en cada elemento.

El tamaño de los elementos finitos inmediatos a la punta de la fisura fue de  $4\mu m$  medido en el plano de la placa. Esta dimensión se eligió luego de considerar por una parte que, de acuerdo con la referencia 8, la microestructura originada por los ensayos de fatiga en un acero inoxidable AISI 316 se caracteriza por un tamaño de celdas de dislocaciones del orden de  $1\mu m$  y por una distancia de separación entre maclas mecánicas inferiores a  $1,5\mu m$ , además por microscopía de transmisión y por mediciones de microdurezas se apreció en esa investigación una microestructura de dislocaciones bastante uniforme en regiones de más

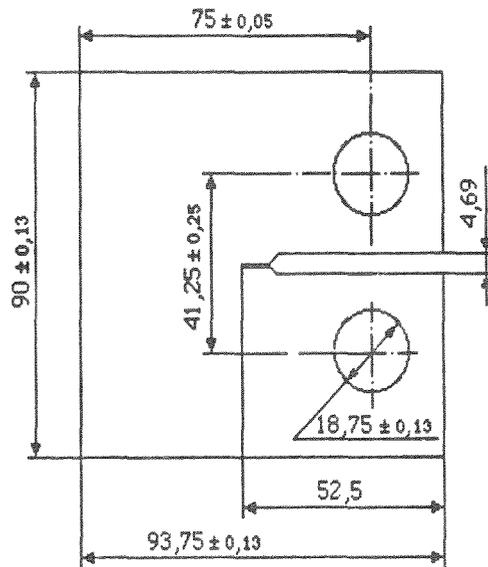


Figura 2. Probeta de tensión compacta considerada en este trabajo.

de  $5 \mu m$ . De estas consideraciones se concluye que los elementos en la punta de la fisura no deben ser inferiores a  $1 \mu m$  para asumir con cierta seguridad que el material exhibe una microestructura uniforme en el interior de todos los elementos considerados. Por otra parte, se consideró que simulaciones realizadas con elementos finitos bidimensionales<sup>9</sup> para el mismo acero mostraron que un tamaño adecuado de los elementos en las cercanías de la punta de la fisura eran del orden de 1 a  $10 \mu m$  para describir el perfil de deformaciones plásticas delante de la fisura según observaciones experimentales. A través de la mitad del espesor de las probetas se emplearon sólo 5 capas de elementos y de igual grosor, debido a que no se esperaban en esta dirección gradientes importantes ni de tensión ni de deformación.

En la simulación del proceso de fatiga se usó el programa computacional de elementos finitos AT3DEF, el cual corresponde al programa FEAP desarrollado por Taylor<sup>10</sup> y presentado por Zienkiewicz<sup>11</sup>, al que fue necesario agregar elementos tridimensionales elastoplásticos y cambiar los algoritmos de cálculo de la carga no balanceada y de resolución del sistema global. La estrategia de cálculo seguida fue incremental, en cada incremento se itera hasta un nivel de error aceptado antes de proceder al incremento siguiente.

La velocidad de propagación de la fisura se estimó por medio de un modelo de acumulación de daño plástico, en él se utiliza la regla lineal de acumulación de daño de Miner y el criterio de ruptura dado por la relación de Manson-Coffin. Atendiendo al carácter progresivo del avance de la fisura de fatiga, si un elemento de volumen experimenta una deformación plástica cíclica de amplitud  $(\Delta \varepsilon_{p_i}/2)$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), mientras la fisura avanza una distancia  $\Delta X_i$ , entonces la velocidad de avance por ciclo puede escribirse como<sup>8</sup>.

$$da/dN = C^{-1/\beta} \sum_{i=1}^m (\Delta \varepsilon_{p_i}/2)^{1/\beta} \Delta X_i$$

en donde  $C$  y  $\beta$  son los parámetros de la relación de Manson-Coffin del material en estudio, y cuyos valores se determinan experimentalmente<sup>6</sup>. En esa expresión se supuso que la fisura avanza cuando el daño acumulado es igual a 1. Si la zona plástica cíclica frente a una fisura que progresa por fatiga es suficientemente pequeña, entonces se puede asumir que la historia de deformaciones cíclicas  $(\Delta\varepsilon_{p_i}/2)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, m)$ , a las que ha sido sometido un elemento de volumen situado en la punta de la fisura, desde el momento en que ingresa a la zona plástica cíclica hasta que es alcanzado por la punta de la fisura, puede asumirse, con buena aproximación, que corresponde al perfil de deformación plástica delante de la fisura en este último instante.

En este modelo se consideran sólo la microestructura del material frente a la punta de la fisura y las propiedades cíclicas del material, estas últimas resumidas en los parámetros de la relación de Manson-Coffin. Por ello, es posible utilizarlo para estudiar el efecto sobre  $(da/dN)$  de características tales como la geometría de la probeta. Por otro lado, la determinación del perfil de amplitud de las deformaciones plásticas es la única información que requiere el modelo para estimar la velocidad de propagación por ciclo, la que se presta a ser estimada mediante procedimientos numéricos. Debe ser notado que en la deducción de este modelo se supone conocida la trayectoria del frente de fisuración, ya que de este modo se sabe cual perfil de deformaciones es el que corresponde usar.

Se consideró que el material sigue la curva cíclica estabilizada ya que los elementos de volumen frente a una fisura que se propaga por fatiga son sometidos a un gran número de ciclos a cada amplitud de deformación plástica, lo que les permite alcanzar la estabilidad cíclica. Para simular el proceso de ciclado cada probeta fue sometida a una carga monótona—desde el estado virgen y con una longitud de fisura constante— hasta un valor máximo fijado para ella, de modo de cubrir todo el rango de interés para el factor de intensidad de tensiones  $(0-34 \text{ MPa}\sqrt{m})$ ; se supuso que el material obedecía a la curva cíclica estabilizada y que se regía por el criterio de fluencia de von Mises con endurecimiento isotrópico. La importancia de usar la curva cíclica estabilizada radica fundamentalmente en que, al final de cada incremento de carga aplicado, el valor de las deformaciones plásticas frente a la fisura equivalen al de las amplitudes de las deformaciones plásticas cíclicas que se tendrían en fatiga<sup>7</sup>. De lo anterior se concluye que para modelar el fenómeno de fatiga no es necesario considerar avance de la fisura y, además, para cada probeta, basta ejecutar una vez el programa hasta un nivel de carga para tener toda la curva de  $(da/dN)$  hasta ese valor.

Durante esta investigación se usó un coeficiente de tensiones  $R = K_{min}/K_{max}$  igual a cero, lo que hace que  $\Delta K$  sea igual a  $K_{max}$ .  $\Delta K$  se empleó sólo como parámetro de graficación y de referencia para el análisis de la información recopilada, debido a que Font<sup>8</sup> demostró que del frente de fisuración emanan numerosas microfisuras solicitadas en diferentes modos de abertura, lo cual invalida el uso de  $\Delta K$  para describir la velocidad de fisuración. Los valores del factor de intensidad de tensiones  $K$  en modo I de apertura se calcularon de la fórmula analítica para probetas CT:

$$K = \frac{P\sqrt{a}}{Bw} Y(a/w)$$

en que  $P$  es la carga aplicada,  $B$  el espesor de la probeta,  $w$  su ancho  $a$  la longitud de fisura e  $Y$  es el factor geométrico dado por la expresión:

$$Y(a/w) = 29,6 - 185,5(a/w) + 655,7(a/w)^2 - 1017(a/w)^3 + 638,9(a/w)^4$$

### 3. PRESENTACION DE RESULTADOS Y DISCUSION

De la Figura 3 se observa que el modelo de acumulación de daño, con la estimación numérica del estado de deformaciones del material mediante el método de elementos finitos, permitió describir la etapa de propagación estable de las fisuras de fatiga en las probetas CT con las geometrías señaladas, así como la detección precisa de un umbral de propagación. Para bajos valores de  $\Delta K$  se nota una independencia de  $(da/dN)$  respecto del espesor de la probeta; por el contrario, para  $\Delta K$  relativamente alto se aprecia que  $(da/dN)$  crece con la disminución del espesor.

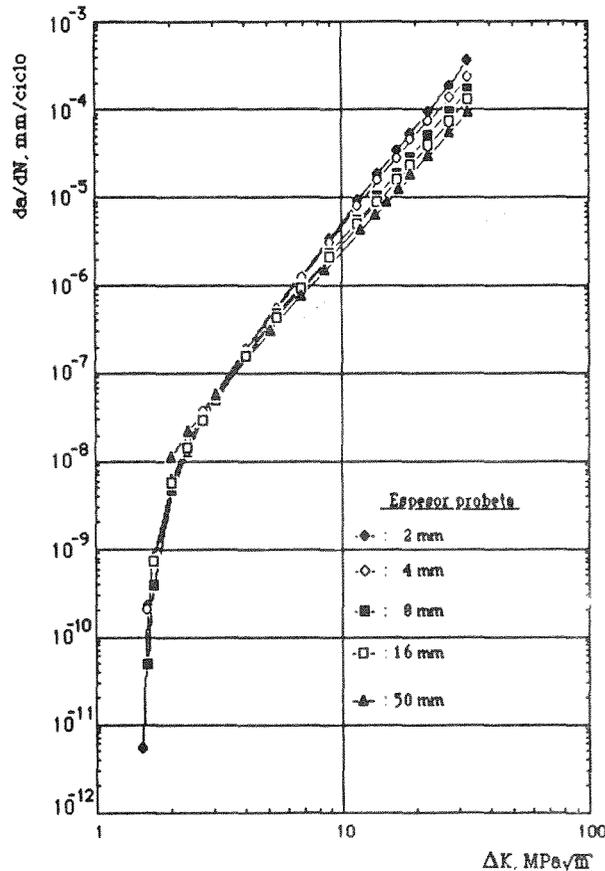


Figura 3. Velocidad de propagación de la fisura como función de  $\Delta K$ , resultados numéricos de este estudio en la superficie de las probetas CT de 2, 4, 8, 16 y 50 mm. de espesor.

Para todas las probetas estudiadas se determinó un mismo umbral de propagación, con un valor de  $\Delta K_{th} = 1,55 \text{ MPa}\sqrt{m}$ , lo cual confirmaría evidencia experimental en otros materiales que indican que el umbral de propagación no depende de la geometría de la probeta considerada, en particular de su espesor, y revela que para valores de  $\Delta K$  cercanos al valor del umbral todas las probetas están sometidas a un estado de deformaciones planas. Lanteigne y Bailon<sup>12</sup>, de experiencias realizadas en acero inoxidable AISI 316 y de un modelo analítico propuesto por ellos, estimaron  $\Delta K_{th} = 4,6 \text{ MPa}\sqrt{m}$ ; mientras que Amzallag y col.<sup>13</sup> reportaron que en experiencias realizadas con este mismo material, aunque no pudieron determinar un umbral de propagación, la fisura se detuvo en algunos casos para un valor de  $\Delta K$  cercano a  $5 \text{ MPa}\sqrt{m}$ . La información numérica de la presente investigación y la experimental de los primeros autores citados se entregan en conjunto en la Figura 4. Las simulaciones de carga cíclica se realizaron con aplicación monótona de la carga y con la fisura de longitud constante, por tal motivo, no se advierten las deformaciones residuales que produce la aplicación cíclica de la carga en el caso real de una fisura sometida a fatiga, ni tampoco se tiene el efecto que estas deformaciones provocan en cuanto a que la apertura de la fisura ocurre para un valor del factor de intensidad de tensiones  $K_a$  superior al valor nominal mínimo aplicado  $K_{min}$ . El programa de elementos finitos empleado determina que la fisura se abre para  $K_a = K_{min}$ , lo que equivale a decir que los  $\Delta K$  usados para correlacionar con las velocidades de propagación numéricas serían los efectivos en el sentido de Elber. Cabe hacer notar que Cortés<sup>7</sup>, en un estudio de propagación de fisuras mediante elementos finitos bidimensionales en deformaciones planas, para un valor nominal de ciclado de  $10 \text{ MPa}\sqrt{m}$  y con  $R = 0$  determinó que la fisura se abría para un valor de  $K$  cercano a  $2 \text{ MPa}\sqrt{m}$  y se cerraba para un valor entre 3 y  $4 \text{ MPa}\sqrt{m}$ . Estas observaciones indican que, para valores bajos de  $\Delta K$  y para tener información más realista y comparable con los datos experimentales, a los valores de  $\Delta K$  asociados a la información numérica de esta investigación se debe sumar una magnitud aproximada a los  $2 \text{ MPa}\sqrt{m}$ . De este modo, para valores bajos de  $\Delta K$ , las curvas numéricas de velocidad de propagación se trasladarían hacia la derecha del observador y se acercarían a las curvas experimentales. En particular, esto quiere decir que el método de acumulación de daño, con la metodología expuesta, predice un valor efectivo del umbral de propagación de  $(\Delta K_{th})_{ef} = 1,55 \text{ MPa}\sqrt{m}$  y se señala un umbral de propagación para un valor nominal  $\Delta K_{th} = 1,55 + 2 = 3,55 \text{ MPa}\sqrt{m}$ , bastante próximo al valor obtenido experimentalmente. Este último resultado puede tomarse como una buena medida de un umbral de propagación para el acero AISI 316.

Como complemento conviene comentar que Lankford y Davidson<sup>14</sup> concluyeron que, en algunas aleaciones de aluminio y para fisuras largas,  $\Delta K_{th}$  corresponde al valor de  $\Delta K$  para el cual la deformación cíclica en los elementos microestructurales frente a la punta de la fisura se reduce a un valor bajo el límite elástico. Arribaron a esta conclusión luego de observar que para valores bajos de  $\Delta K$  el cociente  $K_{max}/K_a$  se aproximaba a 1 a medida que se alcanzaba  $\Delta K_{th}$ , de lo cual concluyeron que la ausencia virtual de apertura de la fisura es lo que produce la existencia del umbral de propagación observado, por lo menos en aleaciones de aluminio. Los resultados del presente estudio permiten predecir la existencia de un umbral de propagación para el acero AISI 316 analizado cuando la fisura es larga. En este caso la fisura se abriría para un valor cercano a  $K_a = 2 \text{ MPa}\sqrt{m}$ , y al tomar un valor nominal aproximado de  $K_{max}$  el cociente  $K_{max}/K_a = (1,55 + 2)/2 = 1,78 \text{ MPa}\sqrt{m}$  es mayor que 1

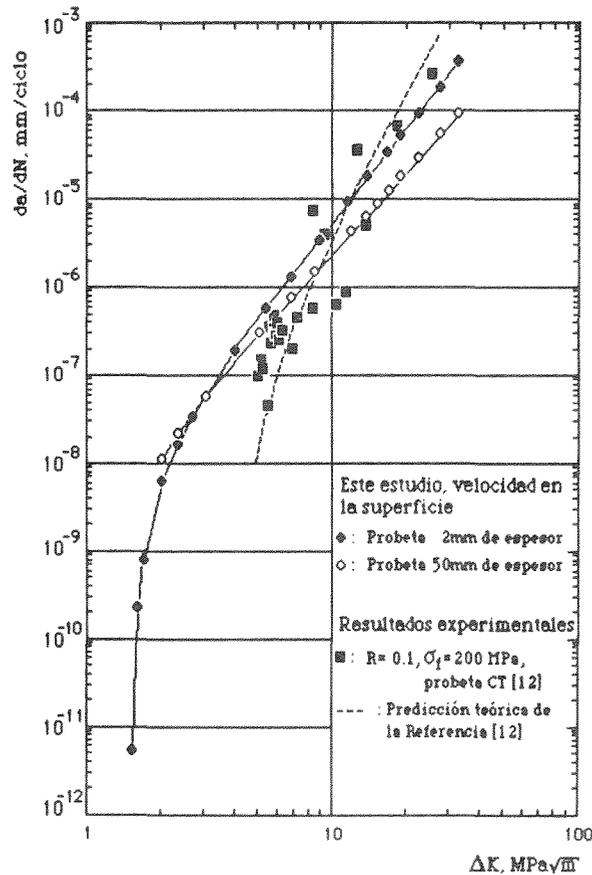


Figura 4. Velocidad de propagación de la fisura como función de  $\Delta K$ , resultados numéricos de este estudio, y experimentales y teóricos de la Referencia 12 para el umbral de propagación.

como consecuencia de que el valor efectivo del umbral que se predijo es de  $1,55 \text{ MPa}\sqrt{m}$ , y no cero como se esperaba al seguir a Lankford y Davidson<sup>14</sup>. Esto contradice la aseveración de estos investigadores acerca de la relación entre la virtual ausencia de abertura con la existencia de un umbral y éste podría originarse por otras causas, al menos para el acero AISI 316.

Para valores de  $\Delta K$  en la zona de propagación estable se predice que  $(da/dN)$  crece con la disminución del espesor, ver Figura 3 donde se muestra la velocidad de fisuración en la superficie de las probetas estudiadas; aunque, si bien es cierto, las diferencias extremas entre los valores de  $(da/dN)$  para los diferentes espesores, y para un mismo valor de  $\Delta K$ , son del orden de la magnitud de la dispersión habitual de los resultados experimentales para este material obtenidos en un mismo laboratorio. Las curvas de velocidad de propagación en el centro de las probetas son similares a las mostradas en la Figura 3, pero las diferencias entre sus valores son algo inferiores. De las Figuras 5 y 6 es claro que los resultados estimados concuerdan bien con la información experimental recopilada para el acero AISI

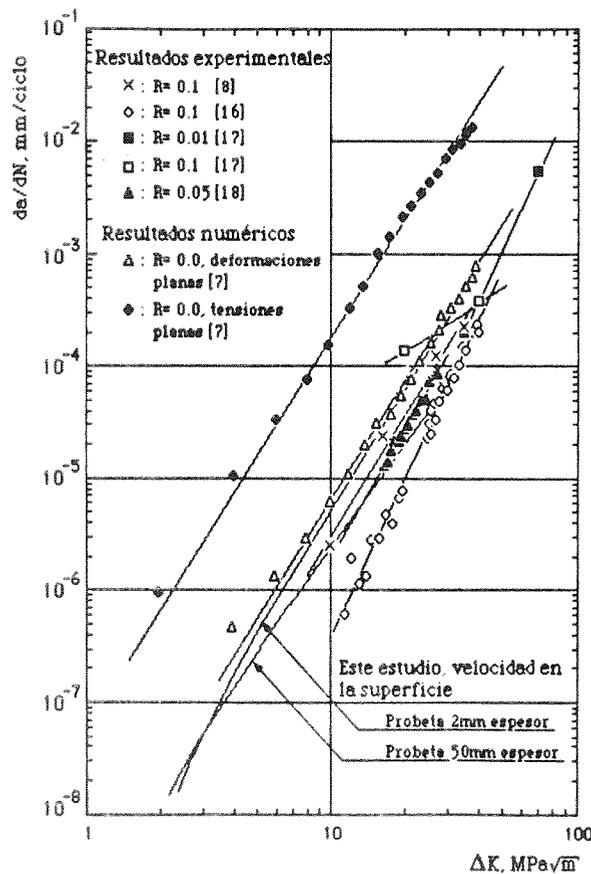


Figura 5. Velocidad de propagación de la fisura como función de  $\Delta K$ , resultados experimentales y numéricos para probetas *CT*.

316 en la etapa de propagación estable, tanto en probetas delgadas como gruesas. Por otra parte, si revisamos la información numérica de la referencia<sup>7</sup> para régimen estable vemos que para un mismo valor de  $\Delta K$  las velocidades calculadas en tensiones planas son aproximadamente 25 veces las indicadas para deformaciones planas, siendo estas últimas cercanas a los valores estimados en este trabajo y a los valores experimentales expuestos. Esta proximidad entre los resultados calculados en la referencia<sup>7</sup> en deformaciones planas y los resultados experimentales, aún los asociados a probetas delgadas que podrían asumirse en principio que están sometidas a un estado próximo a tensiones planas, puede ser explicado por medio de las deformaciones plásticas generadas frente a la fisura. En las Figuras 7 y 8 se presentan las deformaciones plásticas frente a la fisura de las probetas de 2 y de 50 mm de espesor. En la Figura 7 se muestran las deformaciones normales en el plano medio de las probetas, que son las curvas que más se asemejan entre las dos probetas señaladas; mientras que en la Figura 8 se muestran las deformaciones de corte en la superficie, y corresponden a las curvas que más se diferencian entre esas dos probetas. Se aprecia que hasta el máximo nivel de carga aplicado (equivalente a  $\Delta K = 34,33 \text{ MPa}\sqrt{m}$ ) las deformaciones locales

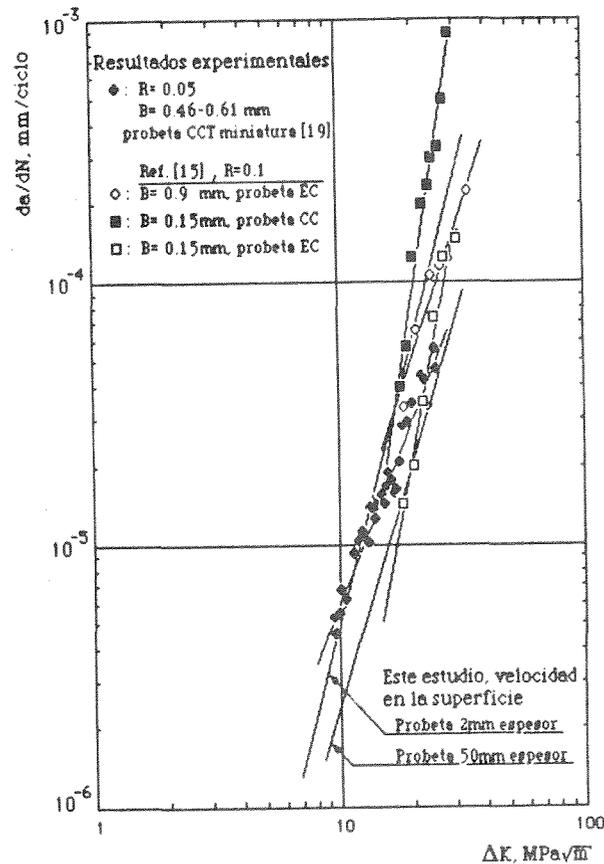


Figura 6. Velocidad de propagación de la fisura como función de  $\Delta K$ , resultados numéricos de este estudio en probetas *CT* y experimentales para otras probetas de pequeño espesor.

asociadas a las probetas de 2 y de 50 mm de espesor no revelan diferencias esenciales ni en sus valores ni en la forma de sus perfiles, además algo similar ocurre entre las deformaciones de estas probetas y las restantes de 4, 8 y 16 mm de espesor. Esto implica que en fatiga, por lo menos hasta el nivel de solicitaciones señalado, todas las probetas analizadas se comportan como si estuvieran en deformaciones planas, aún sucede esto para las probetas más delgadas. Las velocidades de fisuración calculadas resultan por ello cercanas a las predicciones del análisis bidimensional en deformaciones planas. Además, los resultados de Rickerby y Fenici<sup>15</sup> confirman esto, ya que las velocidades en probetas de 0,9 mm de espesor muestran excelente correlación tanto con nuestras predicciones como con aquellas determinadas mediante análisis en deformaciones planas.

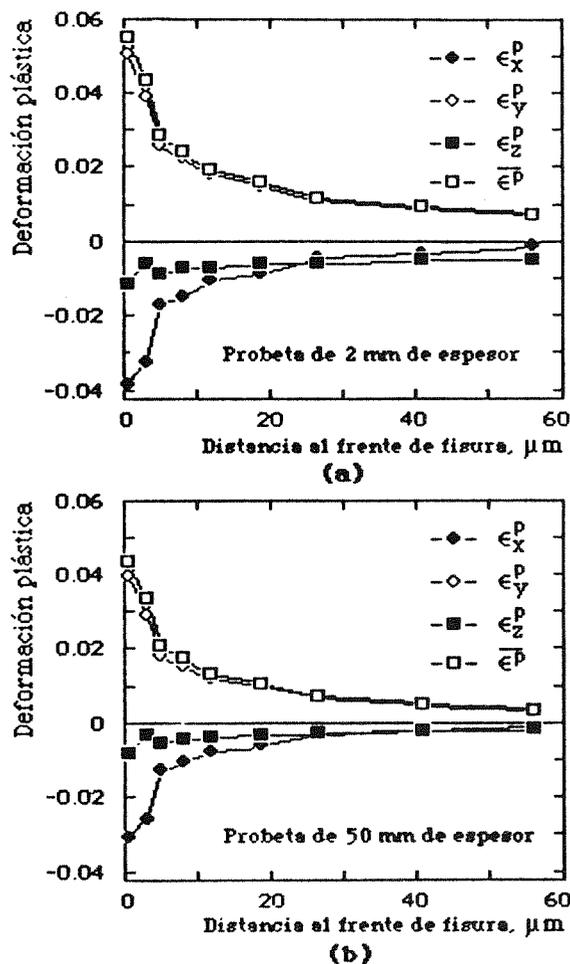


Figura 7. Deformaciones plásticas en el plano medio de las probetas de espesores (a) 2 mm. y (b) 50 mm. para  $\Delta K = 34.33 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

#### 4. CONCLUSIONES

Los resultados del presente trabajo permiten establecer las siguientes conclusiones:

- i) El método de elementos finitos, con un tamaño adecuado de los elementos, puede ser usado para estudiar la distribución de amplitudes de la deformación plástica frente a la punta de una fisura cuando es posible asumir que la deformación plástica  $\epsilon_p$  corresponde a la amplitud de la deformación plástica ( $\Delta\epsilon_p/2$ )
- ii) La metodología propuesta permite describir cualitativamente bien el comportamiento de un material real sometido a fatiga para valores moderados de  $\Delta K$ ; predice un umbral de no propagación, una etapa de propagación lenta y una etapa de propagación estable.
- iii) Para el acero AISI 316 estudiado,  $(da/dN)$  es independiente del espesor de la probeta para  $\Delta K$  bajos. En este estudio, en el cual se considera la variación efectiva del

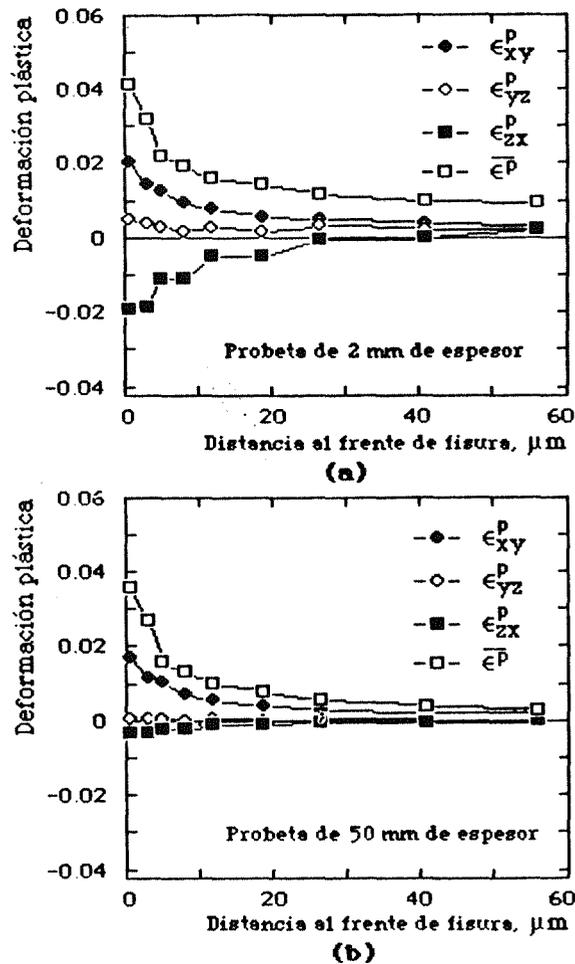


Figura 8. Deformaciones plásticas en la superficie de las probetas de espesores (a) 2 mm. y (b) 50 mm. para  $\Delta K = 34.33 \text{ MPa}\sqrt{m}$ .

factor de intensidad de tensiones  $\Delta K_{eff}$ , la predicción realizada de un umbral de propagación muestra claramente que la existencia de éste puede deberse a causas diferentes que a la ausencia virtual de abertura de fisura durante ciclado con valores bajos de  $\Delta K$ .

- iv) Para el acero AISI 316 estudiado,  $(da/dN)$  depende del espesor de la probeta para  $\Delta K$  moderados, en este último caso la velocidad de fisuración es mayor en las probetas más delgadas, y sus resultados están en concordancia con la información experimental disponible.
- v) La dependencia observada en esta investigación entre la velocidad de propagación de una fisura respecto del espesor de la probeta en un acero AISI 316 permite concluir que tal dependencia se debe principalmente al estado de deformaciones que predomina en la probeta y no sólo, como lo aseguran algunos autores, al cierre de la fisura durante